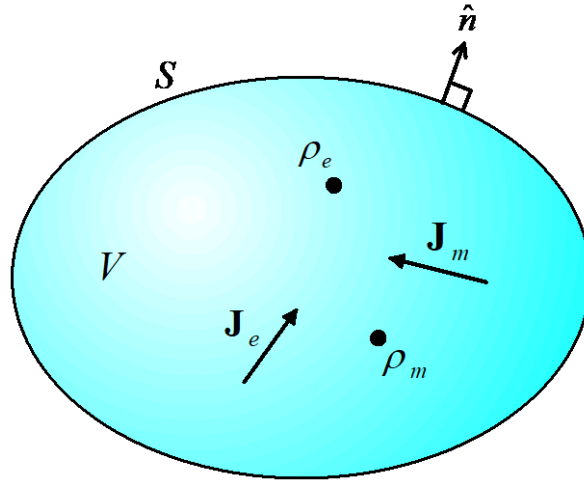


界等価定理 (Field Equivalence Theorem)の解釈と応用

2003/4 平野拓一

1. 閉じた空間内のヘルムホルツの波動方程式の解 (界等価定理)



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\phi\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_m \times \nabla\phi + \nabla\phi\frac{\rho_e}{\varepsilon} \right) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) - (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\varepsilon\phi\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_e \times \nabla\phi + \nabla\phi\frac{\rho_m}{\mu} \right) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) - (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

上の体積積分は体積 \$V\$ 内にある波源の積分を表し、周回面積分は体積 \$V\$ の周囲 \$S\$ での面積分を表す。今の段階では空間は同じ媒質で満たされているとする。

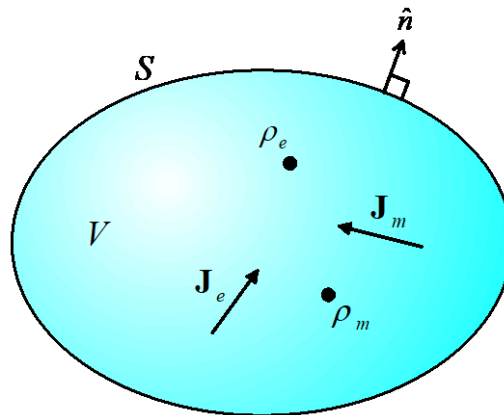
上の式で注目すべきことは、電磁界は体積 \$V\$ 内の波源の体積積分と、境界 \$S\$ 上の電磁界の接線成分から計算されるということである。

2. 等価定理の解釈

1章の式を用いてさまざまな考察ができる。これから、いくつかの実用的な例を取り上げて説明していく。

2.1 波源が全て V 内にあるとき

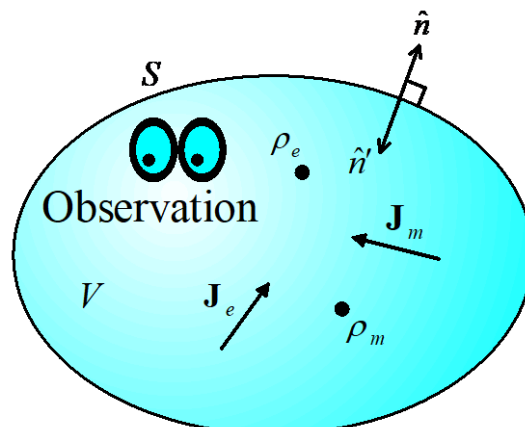
Free space (no source)



今、上の図のような状況を考える。 V 内だけに波源があり、その外には波源が無いとする。もちろん、境界 S というのは計算のために仮定した面であって、 S は空間を満たしている媒質と同じ媒質で出来ているとする(PEC や PMC やインピーダンス壁でなく、透明な壁)。

2.1.1 V 内のフィールドの表現(V の体積で立てた式)

Free space (no source)



フィールドの表現は1章の式そのままである。

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\phi\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_m \times \nabla\phi + \nabla\phi\frac{\rho_e}{\varepsilon} \right) dV \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{n}) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{n}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\varepsilon\phi\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_e \times \nabla\phi + \nabla\phi\frac{\rho_m}{\mu} \right) dV \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{n} \times \mathbf{E}) - (\hat{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS\end{aligned}$$

ところで、体積積分の表現は波源が自由空間に放射する式の表現そのものである（ここが重要）。したがって、この場合は体積 V 外に波源が無いので面積分の寄与は0にならなければならない。すなわち、実は

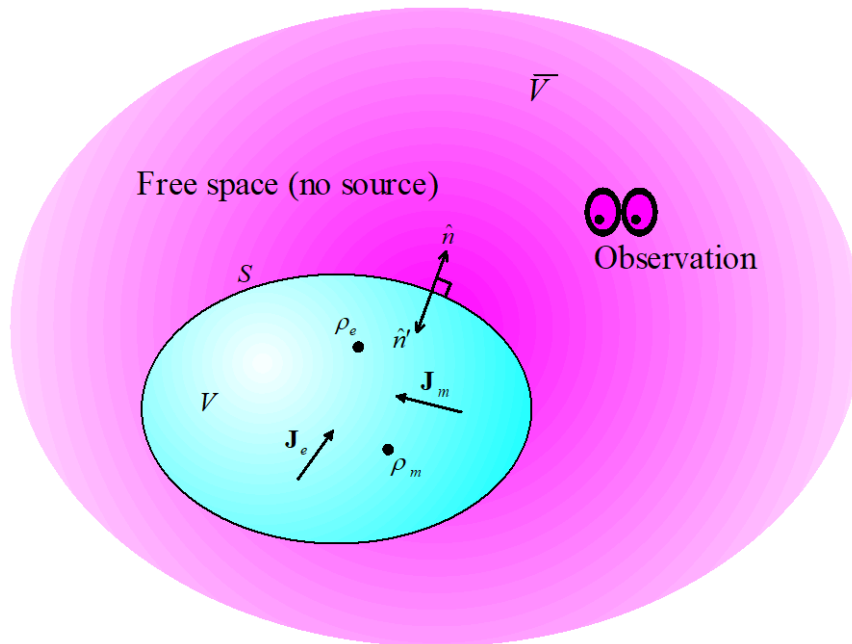
$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{n}) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{n}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS &= 0 \\ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{n} \times \mathbf{E}) - (\hat{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS &= 0\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\phi\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_m \times \nabla\phi + \nabla\phi\frac{\rho_e}{\varepsilon} \right) dV \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\varepsilon\phi\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_e \times \nabla\phi + \nabla\phi\frac{\rho_m}{\mu} \right) dV\end{aligned}$$

となる。

2.1.2 V 外のフィールドの表現(\bar{V} の体積で立てた式)



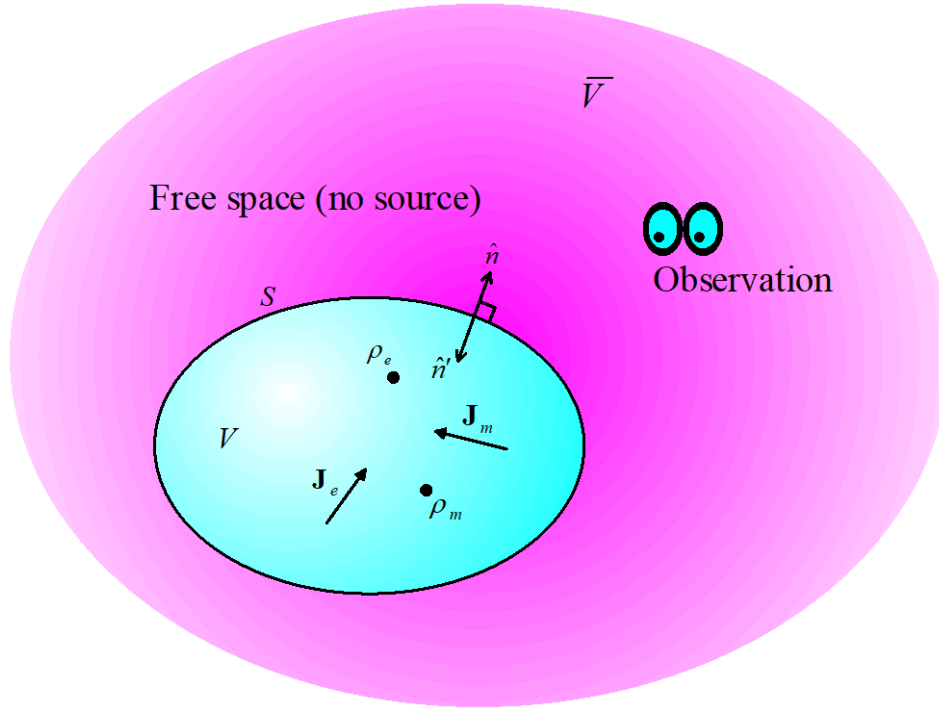
観測点を V 外に持っていき、1 章の表現を書いてみる。すると 1 章の V は上の図の紫色の外の空間 \bar{V} に相当することになり、 S は 2.1.1 節と同じ S である。しかし、今度は S の法線ベクトルが逆になるので、その新たな法線ベクトルは $\hat{n}' = -\hat{n}$ となる。また、 \bar{V} 内には波源が無いので面積分だけが残る。この面積分は 2.1.1 節の面積分に負号が付いたものとなっている。

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{n}) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{n}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{n} \times \mathbf{E}) - (\hat{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

このように V 内の波源については意識しなくて、 S 上の等価波源だけがわかれば良い表現になっている。 S の面の取り方を玉ねぎの皮のように少しずつ広げていくとき、1 つ外側の皮上のフィールドは 1 つ内側の皮上だけの等価波源だけから計算され、それをだんだん外側の皮に向かって計算していくことができる。このため、界等価定理の等価波源は **ホイヘンス波源** と呼ばれる。

2.1.3 V 外のフィールドの表現(V の体積で立てた式)



2.1.1 節の最初の表現をもう一度書くと

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\phi\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_m \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_e}{\varepsilon} \right) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{n}) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{n}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\varepsilon\phi\mathbf{J}_m + \mathbf{J}_e \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_m}{\mu} \right) dV$$

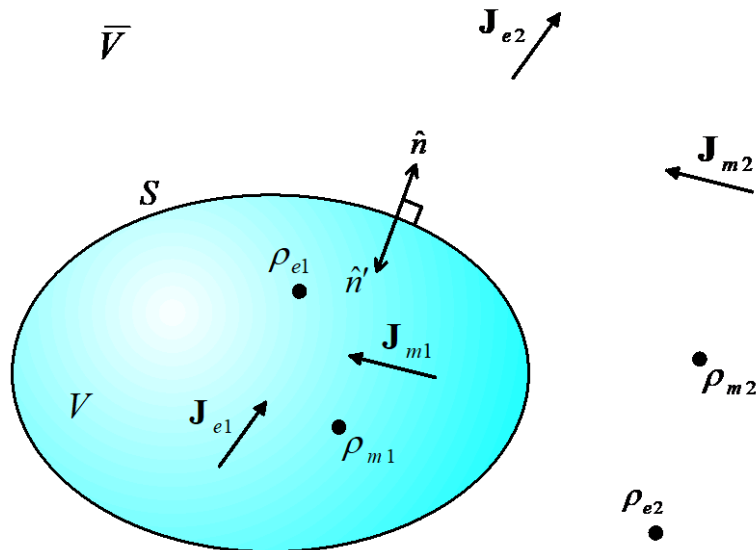
$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{n} \times \mathbf{E}) - (\hat{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

となる、今度は観測点が V 外、つまり \bar{V} にあるから面積分の項の寄与が 0 になるとは限らない(2.1.1 節のような議論は通用しない)。ところで、 \bar{V} においては 2.1.2 節の議論より、面積分の項が本来波源から放射されるフィールドの逆負号のフィールドを \bar{V} 内至る所に放射していることになる(2.1.2 節では面積分の法線ベクトルが逆向きになるから、 S 上の等価電磁流がすべて逆向きに流れて本来波源から放射されるフィールドを表現していた)。従って、 V 内で立てた式において観測点を V 外に持っていくとそれらが相殺して 0 フィールドとなる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

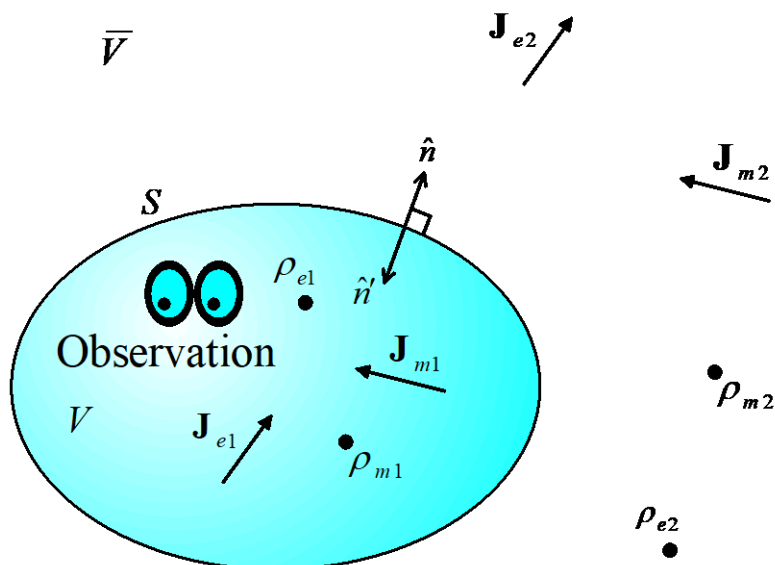
$\mathbf{H} = \mathbf{0}$

2.2 波源が両空間にあるとき



2.1 節の議論にちょっと毛が生えた程度のものである。しかし、この議論は一般的であり、これさえわかればもっと多くの領域に分割された問題などのいろいろな問題に対応できる。 V の外部には波源はあるが、全空間同じ媒質で満たされているとする。

2.2.1 V 内のフィールドの表現(V の体積で立てた式)



フィールドの表現は 1 章の式そのままである。

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\phi\mathbf{J}_{e1} - \mathbf{J}_{m1} \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_{e1}}{\varepsilon} \right) dV$$

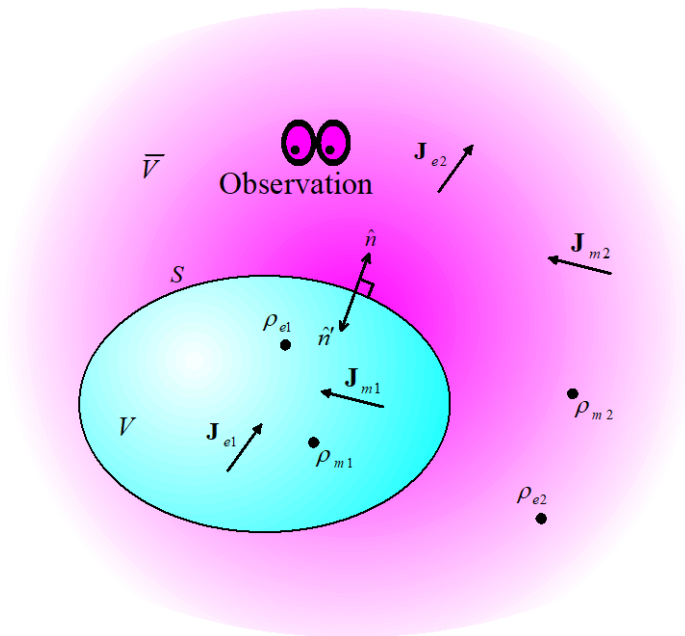
$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{n}) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{n}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\varepsilon\phi\mathbf{J}_{m1} + \mathbf{J}_{e1} \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_{m1}}{\mu} \right) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{n} \times \mathbf{E}) - (\hat{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

体積積分の表現は波源が自由空間に放射する式の表現そのものであり、波源によるフィールドは重ね合わせが出来る（マクスウェルの方程式は線形だから）ことを考えると体積積分の項はV内の波源が自由空間に放射するフィールドを表現している。従って、面積分の項はそれ以外のV外の波源が作るフィールドを表現している。

2.2.2 V外のフィールドの表現(\bar{V} の体積で立てた式)



$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\bar{V}} \left(-j\omega\mu\phi \mathbf{J}_{e2} - \mathbf{J}_{m2} \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_{e2}}{\varepsilon} \right) dV$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) - (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

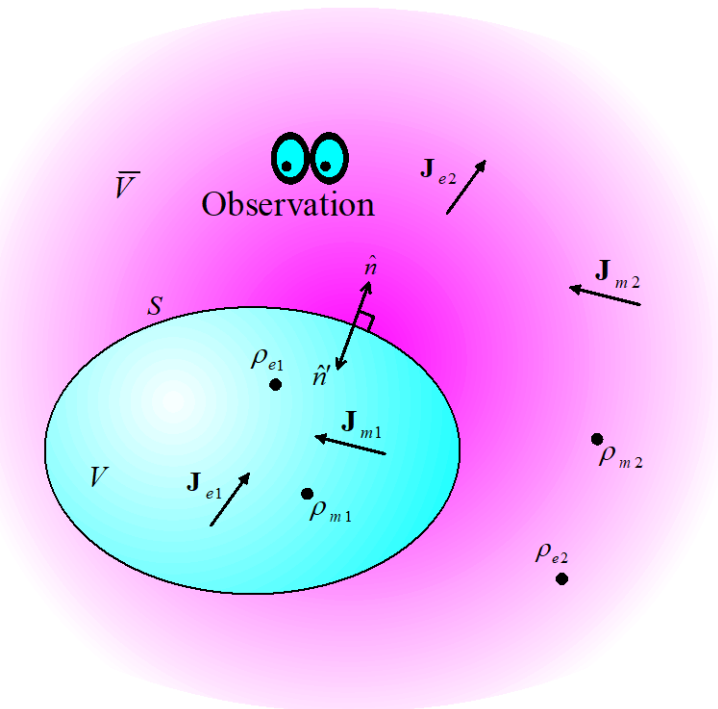
$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\bar{V}} \left(-j\omega\varepsilon\phi \mathbf{J}_{m2} + \mathbf{J}_{e2} \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_{m2}}{\mu} \right) dV$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) - (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

面積分の項の寄与はV内の波源の寄与を表す。

このように、不思議だが確かに面積分の項の寄与は見方を変えると相手側の波源の寄与を表しており、負号が付くか付かないかで変わる。しかし、これは等価波源はS上の全フィールドを用いており、自分が全フィールドに与えた分に関しては2.2.1節の議論によりその空間内では0フィールドとなって消え失せるからだと考えればわかりやすい。

2.2.3 V外のフィールドの表現(Vの体積で立てた式)



2.2.1節の最初の表現をもう一度書くと

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\mu\phi\mathbf{J}_{e1} - \mathbf{J}_{m1} \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_{e1}}{\varepsilon} \right) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\mu\phi(\mathbf{H} \times \hat{n}) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\varepsilon} \{(\mathbf{H} \times \hat{n}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_V \left(-j\omega\varepsilon\phi\mathbf{J}_{m1} + \mathbf{J}_{e1} \times \nabla\phi + \nabla\phi \frac{\rho_{m1}}{\mu} \right) dV$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[-j\omega\varepsilon\phi(\hat{n} \times \mathbf{E}) - (\hat{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla\phi + \frac{1}{j\omega\mu} \{(\hat{n} \times \mathbf{E}) \cdot \nabla\} \nabla\phi \right] dS$$

\bar{V} においては 2.2.2 節の議論より、面積分の項が本来 V 内の波源から放射されるフィールドの逆負号のフィールドを \bar{V} 内至る所に放射していることになる。

従って、 V 内で立てた式において観測点を V 外に持っていくとそれらが相殺して 0 フィールドとなる。

$$\mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

V 外で立てた式において観測点を V 内に持ってきても同様にして 0 フィールドとなる。

まとめ

1 章の電磁界表現において、 V 内で立てた式において観測点を V 外に持っていくと 0 フィールドとなる（しかも、真の意味で 0 フィールド）。つまり、 S 上の等価波源は V 内の波源の放射を打ち消している。そして、 V 内において、 S 上の等価波源は V 外の波源の寄与を表している。

今度は、 V 外で立てた式では、 V 内で立てた式の場合とは逆符号の電磁流が S 上に流れる。これによって、 V 外で V 内の波源の放射界と同じフィールドが再現される。 V 外で立てた式では、 V 内に観測点を持っていくと 0 フィールドとなる。なぜならば、 V 外と V 内で立てる式では等価波源は逆符号になっており、 V 内で立てる式では V 内に 0 フィールドを作る。

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{int}}(\mathbf{r}) = INTV_e^{\text{int}}(\mathbf{r}) + INTS_e^{\text{int}}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}^{\text{int}}(\mathbf{r}) = INTV_m^{\text{int}}(\mathbf{r}) + INTS_m^{\text{int}}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = INTV_e^{\text{ext}}(\mathbf{r}) + INTS_e^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = INTV_e^{\text{ext}}(\mathbf{r}) - INTS_e^{\text{int}}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = INTV_m^{\text{ext}}(\mathbf{r}) + INTS_m^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = INTV_m^{\text{ext}}(\mathbf{r}) - INTS_m^{\text{int}}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

ただし、

$$\begin{cases} INTS_e^{ext}(\mathbf{r}) = -INTS_e^{int}(\mathbf{r}) \\ INTS_m^{ext}(\mathbf{r}) = -INTS_m^{int}(\mathbf{r}) \end{cases}$$

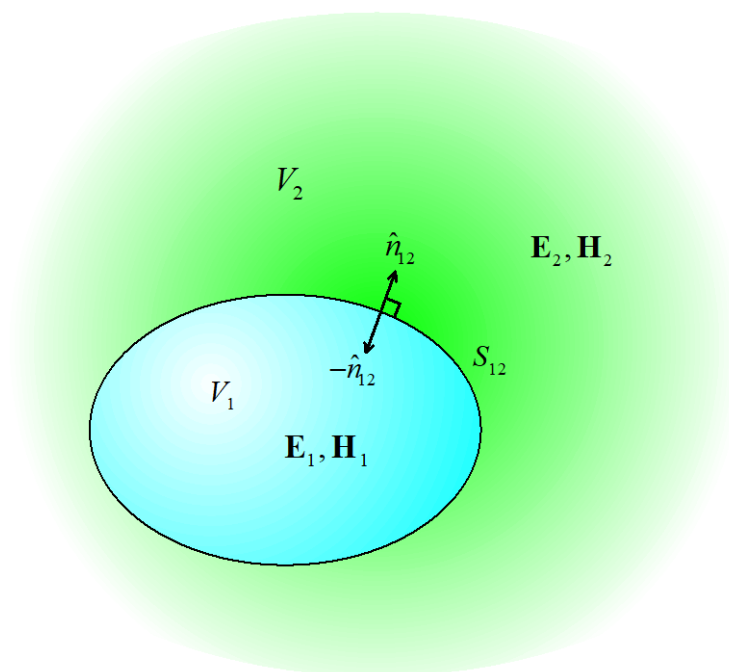
上の式では \mathbf{r} は方程式を立てた空間によらず、同じ場所を表すことに注意。負号を付けると等しくなる理由は境界上の電磁流は同じ電磁界と向きが V 外、 V 内では逆の法線単位ベクトルを用いて計算されているからである。 $INTV, INTS$ はそれぞれ体積積分、面積分の寄与を表している。

			観測点	
			V 内	V 外
式を立てた空間	V 内	$\mathbf{E}^{int}(\mathbf{r})$	\mathbf{E}	$\mathbf{0}$
		$\mathbf{H}^{int}(\mathbf{r})$	\mathbf{H}	$\mathbf{0}$
	V 外	$\mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r})$	$\mathbf{0}$	\mathbf{E}
		$\mathbf{H}^{ext}(\mathbf{r})$	$\mathbf{0}$	\mathbf{H}

もう少し体積積分と面積分の項ごとに分けて詳しく見てみる。

				観測点	
				V 内	V 外
式を立てた空間	V 内	$\mathbf{E}^{int}(\mathbf{r})$	$INTV_e^{int}(\mathbf{r})$	\mathbf{E} by source inside V	\mathbf{E} by source inside V
			$INTS_e^{int}(\mathbf{r})$	\mathbf{E} by source outside V	$-\mathbf{E}$ by source inside V
		$\mathbf{H}^{int}(\mathbf{r})$	$INTV_m^{int}(\mathbf{r})$	\mathbf{H} by source inside V	\mathbf{H} by source inside V
			$INTS_m^{int}(\mathbf{r})$	\mathbf{H} by source outside V	$-\mathbf{H}$ by source inside V
	V 外	$\mathbf{E}^{ext}(\mathbf{r})$	$INTV_e^{ext}(\mathbf{r})$	\mathbf{E} by source outside V	\mathbf{E} by source outside V
			$INTS_e^{ext}(\mathbf{r})$	$-\mathbf{E}$ by source outside V	\mathbf{E} by source inside V
		$\mathbf{H}^{ext}(\mathbf{r})$	$INTV_m^{ext}(\mathbf{r})$	\mathbf{H} by source outside V	\mathbf{H} by source outside V
			$INTS_m^{ext}(\mathbf{r})$	$-\mathbf{H}$ by source outside V	\mathbf{H} by source inside V

3. 等価定理でフィールドの不連続を表現する



今、考えにくいかも知れないが、上の図のように2つの空間 V_1, V_2 があり、境界は透明であり、空間 V_1, V_2 は全て同じ媒質で満たされていると仮定する。しかしそれぞれの空間内では電磁界は $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ のマクスウェルの方程式を満たす分布になっているとする。境界 S_{12} 上ではそれらのフィールドは不連続になっている（境界 S_{12} の材質は何でも構わない。というよりもすでに境界上の電磁界分布が与えられているので、分布を与えることによって材質を指定したのと同じことになっている）。そのとき、境界 S_{12} 上で空間 V_1, V_2 に分け、等価定理を適用して各領域のフィールドを表現してみる。そのとき、境界 S_{12} 上での全電界は不連続となり、どの値を用いるか困ってしまう。今までの方法は用いることができない。しかし、2章の内容をよく理解すれば道はひらける。

空間 V_1 で立てた式で、観測点を空間 V_2 に持っていったら界が $(\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2)$ になるようにする。そのためには、空間 V_1 での境界上の等価電磁流として次のものを選べばよい。

$$\mathbf{J}_1 = \hat{n} \times \mathbf{H} = \hat{n}_{12} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)$$

$$\mathbf{M}_1 = \mathbf{E} \times \hat{n} = (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \hat{n}_{12}$$

逆に、同様にして空間 V_2 で立てた式で、観測点を空間 V_1 に持っていったら界が $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$ になるようにするには次のような等価電磁流を境界 S_{12} 上に流せばよい。

$$\mathbf{J}_2 = \hat{n} \times \mathbf{H} = \hat{n}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = -\mathbf{J}_1$$

$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{E} \times \hat{n} = (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \times \hat{n}_{12} = -\mathbf{M}_1$$

このような電磁流を境界上に仮定すれば、等価定理によってフィールドの不連続を矛盾な

く再現できる。つまり、一方の空間で立てた式だけを用いて（フィールドの不連続も含めて）全体のフィールドを表現できる。

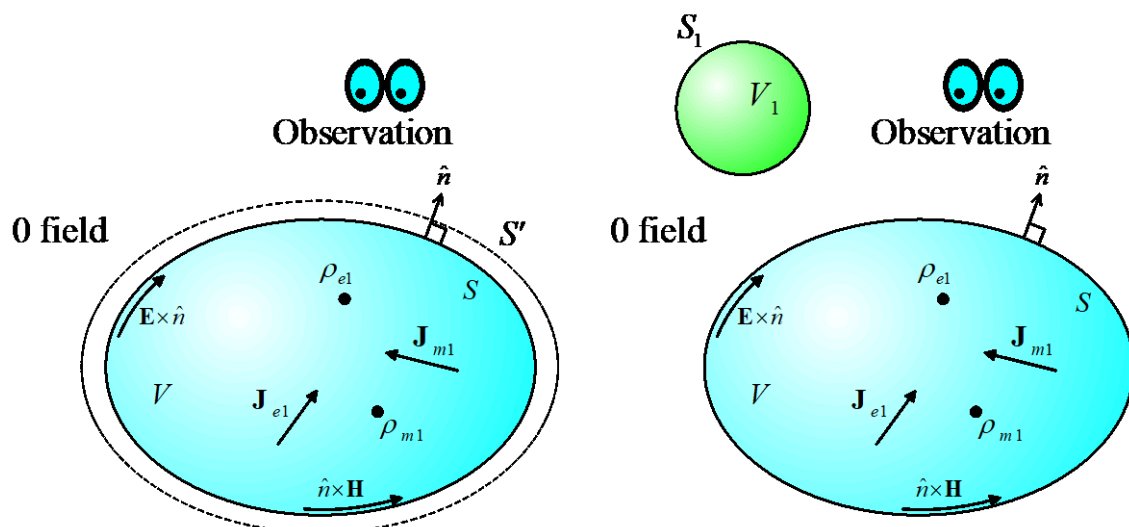
まとめ

境界上の等価電磁流はフィールドの不連続を作り出している。

4. 等価定理の応用

今度は S が最初ある媒質だったとき、その媒質を変化させて、その代わりに電流および磁流を S 上に流して等価的に元の媒質があるときのフィールドを実現する応用例を説明する。モーメント法で線状アンテナを解析するときに電流を仮定して金属を取り除いたり [2]、モーメント法で導波管スロットアンテナを解析するときに磁流を流した金属壁でふたをする理由もこの説明でわかる。また、導波管スロットアンテナのモーメント法解析で、導波管内部の同じスロット上の磁流のリアクションを計算するときに仮想空洞法 [5] が用いられるが、そのときも無限長導波管を金属壁でふたをして空洞にして計算する。

4.1.0 フィールドの空間には任意の媒質を置いても変化は無い



上図左のように 2.2.3 節の議論より V 内で立てた式において観測点を V 外に持っていくと 0 フィールドとなる。0 フィールドの場所には上図右のように任意の媒質を置いてもフィールドには何ら変化を与えない。

最初はこのことがよくわからないのでもう少し詳しく説明する。なぜわかりにくいかと

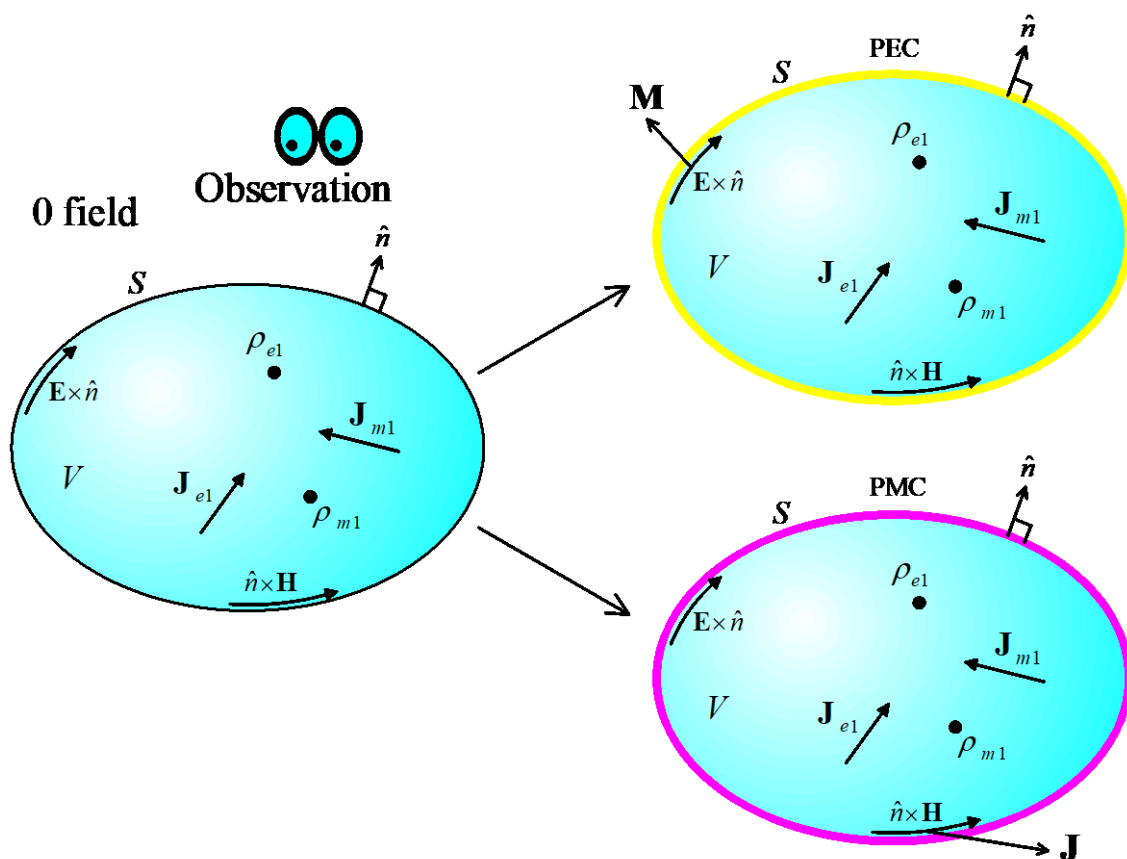
言うと、次のような疑問がないだろうか？1章の表現では、体積積分も面積分も自由空間のグリーン関数を用いて体積内および面上の波源からの寄与の総和を求めている。従って、何か違う媒質を置いてしまったら自由空間のグリーン関数を使うことができず、1章の式は使えないのではないかという疑問がある。

言い方を変えると、0フィールドになるということは違う方向に向かって飛んでいる電磁波がうまく打ち消し合っている状況だという可能性もある。そのようなときは間に違う媒質を置いたらバランスが崩れて0フィールドではなくなってしまうのではないかと想像できる。しかし、違う方向に飛んでいる電磁界の和が至る所で0になることはあり得ない。必ず定在波となって山と谷が出来てしまうのである。実は等価波源は局所的にその場所に飛んでくる電磁界が外に出て行くのを打ち消しているのである。 V の遙か彼方で0フィールドを観測している状況を想像してみよう。そのときはいくつかの方向から飛んでくる電磁界の和が0になるということはあり得ない。なぜならば電磁波が飛んでくる可能性があるのは点に見える V の方向しかないからである。つまり、 V の方向からは電磁波が飛んでこないということになる。もうすこし V に近づいて0フィールドを観測してみよう。そのときでも電磁波が飛んでくる可能性があるのは V を見込む立体角の範囲内のみである。その立体角から電磁波が飛んできてうまく打ち消しあっているととしても、定在波の一部の場所だけであり、他の場所では山と谷が出来てしまう。すなわち、いくら V に近づいてフィールドを観測しようとしてもまったく電磁波が飛んできていないのである。 V 内の波源から放射された電磁波は S で吸収されるように局所的に S 上の等価波源が打ち消しているのである。従って、0フィールドの V 外の空間には本当にフィールドが無く、何を置いても V 内のフィールドにも V 外のフィールドにも何ら変化は与えない。

最初の自由空間のグリーン関数を使っていいのかという疑問も、このように違う媒質を置いたことが全くフィールドに変化を与えないので、自由空間のグリーン関数を用いても媒質があるときのグリーン関数を用いてもどちらでも構わない。

今の説明をもう一度理論的に説明する。 V 外の空間のフィールドを計算するとき、 S 上の等価波源を用いて計算するのではなく、上図左の S' の等価波源を用いて計算することにする。すると、 S' は至る所0フィールドなので、等価波源も0となる。このように S' 上のフィールドを用いて面積分表現すれば、面積分は消えて至る所0フィールドであり、真の意味でフィールドは何も存在しないことがわかる。

4.2 PEC や PMC で S を囲む



4.1 節の議論より、 V 外の 0 フィールドの場所にはどんな媒質を置いても構わない。

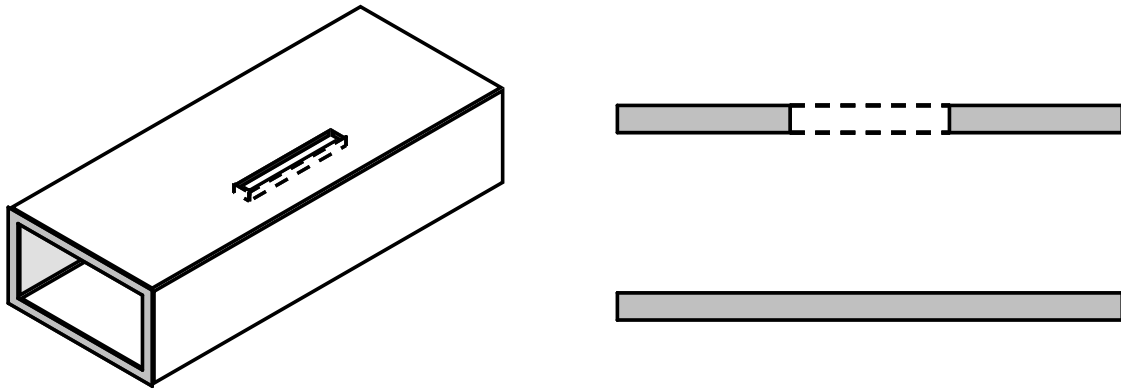
上図右上のように V 外から電気壁(PEC)を近づけていく。 S から離れているときは問題ないが、PEC が S に密着した瞬間、 \mathbf{E} の接線成分 $\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}$ が消え失せてしまう。 V 内でのこの変化を元に戻すために強制的に PEC 上に磁流 $\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}$ を流す (3 章で説明したように、この磁流が電界の不連続を生成する)。また、PEC は比誘電率が無限大となるが、比透磁率は 1 なので磁界には何も影響を与えない。よって、PEC で囲まれたモデルでは印加波源としては $\mathbf{J}_{e1}, \mathbf{J}_{m1}, \rho_{e1}, \rho_{m1}, \mathbf{M}$ である。これらが V 内に放射する電磁界を計算するときには PEC で囲まれたモデルのグリーン関数 (解析的に求まるとは限らないが) を用いなければならない。なぜならば、もし PEC で囲まれたモデルのグリーン関数を用いず、インピーダンス壁などの一般の壁を置く場合には一般には電界だけでなく磁界も変化し、等価電流も印加しなければならないからである。今は PEC で囲ったという前提で、それを補償するために等価磁流 \mathbf{M} を流したのである。このように、空間を満たす媒質と違うものを S に密着させたらもう 1 章の式を使うことはできない。内部の波源が放射する電磁界は S に新たな媒質を密着させた状態で計算しなければならないのである (もし、まだ自由空間のグリーン関数を使い続けるならば S 上で電界の接線成分は消えず、 \mathbf{M} を強制的に流す今の議論は

必要なくなる)。ただし、そのときに元のフィールドを境界上で再現するような電磁流を S 上に強制的に流しておけば新たな媒質を密着させる前に 1 章の式で計算したフィールドと全く同じフィールドを再現できるのである。これが等価定理と言われる所以である。

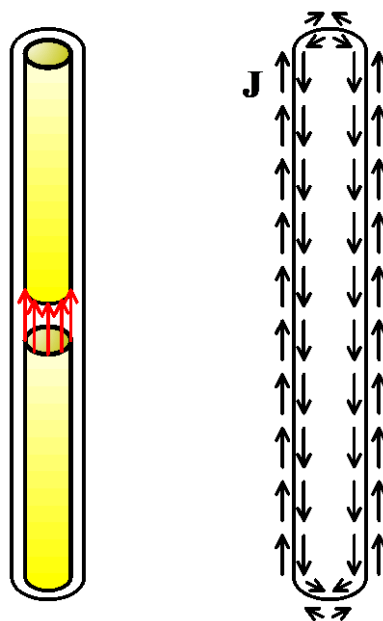
この問題の場合は境界に何も置かない場合（中と同じ媒質で外を満たす=吸収境界条件？）はそのまま元のフィールドとなるので、等価電流も等価磁流も置く必要はない。

PEC で領域を囲む方法は導波管スロットアンテナのモーメント法解析[3][4]でよく用いられる。下図に示すような導波管スロットアンテナでスロットの上部と下部の開口に磁流を流した PEC で蓋をすれば各解析領域は完全に分離される。しかも各領域のグリーン関数は簡単に求められる。

上図右下のような PMC で囲まれたモデルの計算は同様にして等価電流だけ S 上で強制的に流せばよい。



4.3 線状アンテナのモーメント法解析(PEC を取り除く)



線状アンテナのモーメント法解析[2]などでは、元々PECがあったところに等価電流を仮定し、PECを取り除いて自由空間のグリーン関数で計算する。これはどのようなことか、等価定理を使って考えてみる。

まず、上図左のようにアンテナの表面(导体棒と空気の境界)を閉曲面で覆い、外部領域はその面上の等価電磁流からの放射と考える。3章の議論を使って、現在あるフィールドの不連続を境界上に等価電磁流を流して表現する。境界上の電界の接線成分は金属导体内部の表面はもちろん0であり、外部でもPECの条件から0となる。よって、磁流は流す必要がない(流しても結局その値は0である)。結局、导体棒表面には電流を流し、モーメント法ではこれを未知の電流分布とする(後で電界の接線成分が0という境界条件を適用して決定する)。

そして、外部領域を考えると、電流が計算できたとすれば、外部領域の電磁界の表現において観測点を内部領域に持っていったら0フィールドとなる。つまり、内部領域にある金属棒はあっても無くてもよく、計算に便利のように取り除いて外部空間と同じ媒質で満たす。未知の電流分布も最終的にはMaxwellの方程式の解となることを条件としているので、基底関数のリアクションの計算では金属棒を取り除いて計算しても構わない。このように、フィールドの不連続のある空間では場合分けして式を作らなければならなかったが、3章の式を使って境界上に等価電磁流を流して空間の不連続にかかわらず、1つの空間の式でうまく全ての空間のフィールドを計算できるようにしているのである。

給電点はPECではないので、電界も接線成分を持つ。モーメント法のデルタギャップ給電モデルではよく無視して計算されるが、正確には給電部には電流だけでなく、磁流も同時に考慮する必要がある[6][7]。

今回は前節の導波管スロットアンテナの解析の場合とは逆に金属を取り除いた。このようにモーメント法(境界要素法)では未知数が少なくなるように、等価定理をうまく使うと効率が良い。

まとめ

金属を取り除くとき→元々金属上に流れていた電流を自由空間に強制的に流し、金属を取り除く。グリーン関数は元々あった金属が無いものとして扱う。

自由空間を金属でふたをするとき→自由空間に存在していた電界の接線成分を再現するためにふたをした金属の上に磁流を流す。グリーン関数は金属でふたをしたグリーン関数を用いる。

参考文献

- [1] J.A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw-Hill
- [2] R.F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, IEEE Press
- [3] T. Vu Khac, "Impedance Properties of a Longitudinal Slot Antenna in the Broad Face of Rectangular Waveguide," *IEEE Trans.*, AP-21, pp.708-710, 1973.
- [4] R.W. Lyon, and A.J. Sangster, "Efficient moment method analysis of radiating slots in a thick-walled rectangular waveguide," *IEE Proc.* Vol. 128, Pt. H, No. 4, pp. 197-205, August 1981.
- [5] 関一, "壁面上開口を有する矩形導波管内電磁界の表現方法について," 電子通信学会 光・電波部門全国大会, 昭和 59 年
- [6] 稲垣直樹, "給電点に有限幅の間げきを持つ円筒状アンテナの積分方程式とその解について," 電子情報通信学会論文誌, 第 52-B 巻 5 号, pp. 292-298, 昭和 44 年 5 月
- [7] 呉迪, 平野拓一, 稲垣直樹, 菊間信良 "有限間隙励振円筒状アンテナの忠実なモデル化に基づく数値解析," 電子情報通信学会論文誌 B, Vol.J82, No.4, pp. 609-619, 1999 年 4 月