

素子間相互結合を表すインピーダンス行列の計算方法

2009年2月1日

平野拓一(東京工業大学)

1. はじめに

電磁界シミュレータの解析結果から素子相互結合を表す等価回路パラメータ、すなわちインピーダンス行列、アドミタンス行列などを計算する方法について説明する。

2. モーメント法解析の結果を用いたインピーダンス行列の計算方法

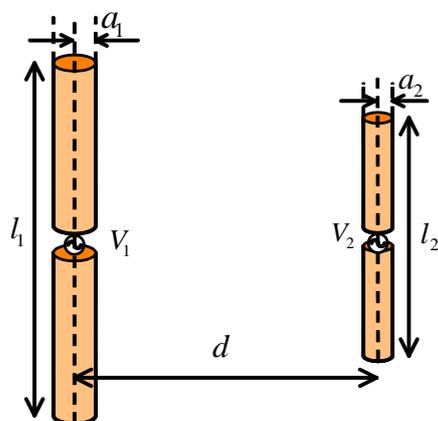
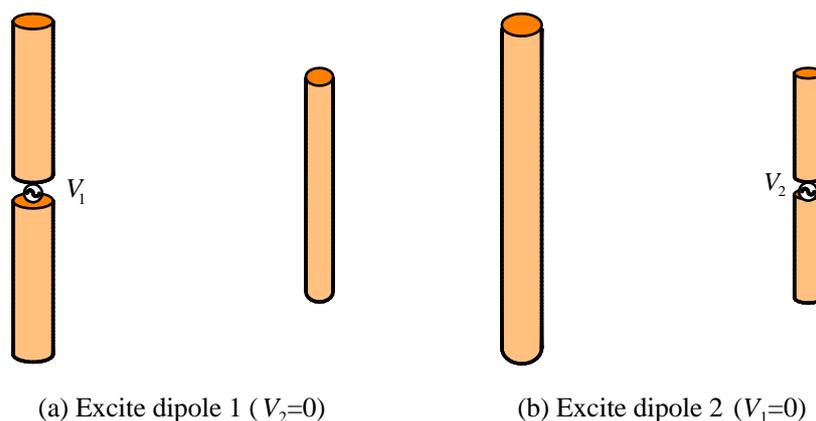


図 1 2つのダイポールアンテナの解析



(a) Excite dipole 1 ($V_2=0$)

(b) Excite dipole 2 ($V_1=0$)

図 2 2種類の励振

例として図 1 に、2つのダイポールアンテナのモーメント法解析モデルを示す。モーメント法ではデルタギャップ給電を用いるとする。目的はこのダイポールアンテナ系の給電部の Z 行列 (あるいは Y 行列) を求めることである。

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}}_{=Z} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}}_{=Y} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし、 $Y = Z^{-1}$ の関係がある。 I_1, I_2 はそれぞれ V_1, V_2 を与えた集中定数的ポートにおける電流値である。ここで、「集中定数的」というのは、ポートの大きさは波長に比して小さくなければならないという意味である。そうでなければ場所によって電圧および電流が変わってしまい、図 3 に示すような集中定数で用いる電圧 $\int_{\Gamma_\ell} \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l}_\ell = V$ および電流

$\int_{\Gamma_w} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t) \cdot \underbrace{(-\hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{l}_w)}_{=\hat{\mathbf{i}}_\ell} = I$ を定義することができないからである。

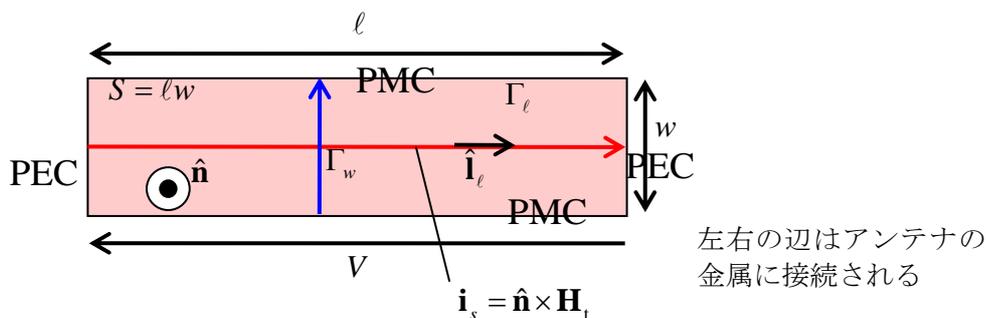


図 3 集中定数ポートの説明

式(1)、式(2)の Z 行列(Y 行列)の計算のために、図 2 に示すように各素子を順番に励振した 2つのモデルを考える。励振されない素子は給電部を短絡した導体棒と見なすことができる。モーメント法のデルタギャップ給電は、給電部に強制的に電界を印加するので、定電圧源による励振と考えることができる。従って、式(2)のアドミタンス行列による考察が簡単になる。式(2)を展開すると次式が得られる。

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \quad (3)$$

従って、各 Y 行列の要素は次のように計算できる。

$$\begin{cases} Y_{11} = \frac{I_1}{V_1} \Big|_{V_2=0} \\ Y_{12} = \frac{I_1}{V_2} \Big|_{V_1=0} \\ Y_{21} = \frac{I_2}{V_1} \Big|_{V_2=0} \\ Y_{22} = \frac{I_2}{V_2} \Big|_{V_1=0} \end{cases} \quad (4)$$

Y_{11} と Y_{21} は図 2(a) のモデルで、 Y_{12} と Y_{22} は図 2(b) のモデルで計算できる。

3. 計算例

3.1 2素子ダイポールアンテナのインピーダンス行列の計算

図 1 において、 $l_1 = l_2 = \lambda/2$ 、 $a_1 = a_2 = \lambda/1000$ 、 $d = \lambda/2$ としてモーメント法[1] (平野自作の *Mathematica* プログラム) で計算した。

$$Z_{in} = 84.3 + j34.4$$

そのとき、図 2(a) のダイポール 2 の短絡ポート電流は

$$I_2 = 0.00419 + j0.000837$$

であった。従って、

$$Y_{11} = Y_{22} = 0.0102 - j0.00415$$

$$Y_{12} = Y_{21} = 0.00419 + j0.000837$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0102 - j0.00415 & 0.00419 + j0.000837 \\ 0.00419 + j0.000837 & 0.0102 - j0.00415 \end{bmatrix}$$

$$Z = Y^{-1} = \begin{bmatrix} 82.4 + j48.8 & -16.3 - j33.5 \\ -16.3 - j33.5 & 82.4 + j48.8 \end{bmatrix}$$

式(1)より、素子 2 のポートを開放したときは $I_2 = 0$ なので、

$$V_1 = (82.4 + j48.8)I_1 \Rightarrow Z_{in} = V_1 / I_1 = 82.4 + j48.8 \quad (\text{下の参考より、素子 1 のみがある状況に近い})$$

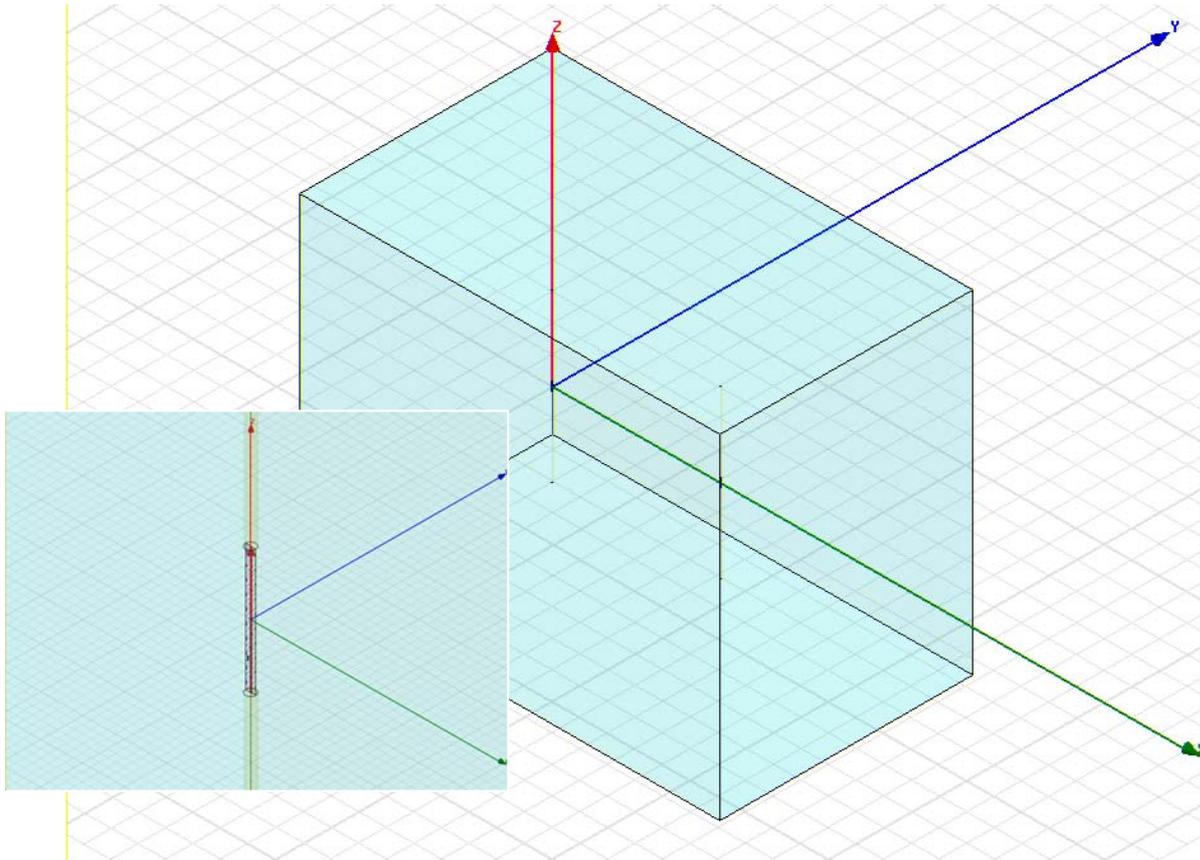
式(2)より、素子 2 のポートを短絡したときは $V_2 = 0$ なので

$$I_1 = (0.0102 + j0.00415)V_1 \Rightarrow Z_{in} = V_1 / I_1 = 84.1 + j34.4$$

【参考】

素子 1 のみがあるときの素子 1 の入力インピーダンスは $Z_{in} = 82.2 + j47.8$

【参考】 Ansoft HFSS での計算結果は次のようになる。



Solution Data: two_dipoles - HFSSModel1

Design Variation: '0.061' py='1.22mm' xx='0.0915' yy='0.0915' zz='0.122'

Simulation: Setup1 LastAdaptive

Convergence Profile Matrix Data

S Matrix Gamma Z0 Y Matrix Z Matrix

Real/Imaginary

Export... Equivalent Circuit Export...

All Freqs. 2.45 (GHz)

Freq		Y:LumpPort1:1	Y:LumpPort2:1	Z:LumpPort1:1	Z:LumpPort2:1
2.45 (GHz)	LumpPort1:1	(0.0095731, -0.0050423)	(0.0040403, 0.00022624)	(79.887, 56.744)	(-14.495, -33.938)
	LumpPort2:1	(0.0040403, 0.00022624)	(0.0094624, -0.0050909)	(-14.495, -33.938)	(79.938, 57.846)

Close

3.2 2素子ダイポールアンテナのインピーダンス行列の計算(NEC2 を用いた例)

図 1 において、 $l_1 = l_2 = \lambda/2$ ， $a_1 = a_2 = \lambda/1000$ ， $d = \lambda/2$ として NEC2[3] で計算した。

3.2.1 NEC2 によるインピーダンス行列の解析

【NEC2 の入力ファイル】

```
CM DIPOLE ANTENNA
CE
GW 1 13 0 0 -0.0306 0 0 0.0306 .000122
GW 2 13 0.0612 0 -0.0306 0.0612 0 0.0306 .000122
GE
FR 0 1 0 0 2450. 100.
EX 0 1 7 1 1.0 0.0
XQ
RP
EN
```

【出力ファイル】

```
1

*****
NUMERICAL ELECTROMAGNETICS CODE (NEC-2D)
*****

---- COMMENTS ----

DIPOLE ANTENNA

--- STRUCTURE SPECIFICATION ---

COORDINATES MUST BE INPUT IN
METERS OR BE SCALED TO METERS
BEFORE STRUCTURE INPUT IS ENDED

WIRE
LAST TAG NO. OF FIRST
NO. TAG X1 Y1 Z1 X2 Y2 Z2 RADIUS SEG. SEG.
SEG. NO.
1 1 0.00000 0.00000 -0.03060 0.00000 0.00000 0.03060 0.00012 13 1
13 1 0.06120 0.00000 -0.03060 0.06120 0.00000 0.03060 0.00012 13 14
26 2

TOTAL SEGMENTS USED= 26 NO. SEG. IN A SYMMETRIC CELL= 26 SYMMETRY FLAG=
0

- MULTIPLE WIRE JUNCTIONS -
JUNCTION SEGMENTS (- FOR END 1, + FOR END 2)
```

NONE

---- SEGMENTATION DATA ----

COORDINATES IN METERS

I+ AND I- INDICATE THE SEGMENTS BEFORE AND AFTER I

SEG. CONNECTION NO.	COORDINATES OF DATA TAG			SEG. CENTER	SEG. LENGTH	SEG. ALPHA	ORIENTATION ANGLES			WIRE		
NO.	X	Y	Z				BETA	RADIUS	I-	I	I+	
1	0.00000	0.00000	-0.02825	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	0	1	2	1	
2	0.00000	0.00000	-0.02354	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	1	2	3	1	
3	0.00000	0.00000	-0.01883	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	2	3	4	1	
4	0.00000	0.00000	-0.01412	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	3	4	5	1	
5	0.00000	0.00000	-0.00942	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	4	5	6	1	
6	0.00000	0.00000	-0.00471	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	5	6	7	1	
7	0.00000	0.00000	0.00000	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	6	7	8	1	
8	0.00000	0.00000	0.00471	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	7	8	9	1	
9	0.00000	0.00000	0.00942	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	8	9	10	1	
10	0.00000	0.00000	0.01412	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	9	10	11	1	
11	0.00000	0.00000	0.01883	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	10	11	12	1	
12	0.00000	0.00000	0.02354	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	11	12	13	1	
13	0.00000	0.00000	0.02825	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	12	13	0	1	
14	0.06120	0.00000	-0.02825	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	0	14	15	2	
15	0.06120	0.00000	-0.02354	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	14	15	16	2	
16	0.06120	0.00000	-0.01883	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	15	16	17	2	
17	0.06120	0.00000	-0.01412	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	16	17	18	2	
18	0.06120	0.00000	-0.00942	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	17	18	19	2	
19	0.06120	0.00000	-0.00471	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	18	19	20	2	
20	0.06120	0.00000	0.00000	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	19	20	21	2	
21	0.06120	0.00000	0.00471	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	20	21	22	2	
22	0.06120	0.00000	0.00942	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	21	22	23	2	
23	0.06120	0.00000	0.01412	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	22	23	24	2	
24	0.06120	0.00000	0.01883	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	23	24	25	2	
25	0.06120	0.00000	0.02354	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	24	25	26	2	
26	0.06120	0.00000	0.02825	0.00471	90.00000	0.00000	0.00012	25	26	0	2	

```

**** DATA CARD NO. 1  FR  0  1  0  0  2.45000E+03  1.00000E+02  0.00000E+00
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
**** DATA CARD NO. 2  EX  0  1  7  1  1.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
**** DATA CARD NO. 3  XQ  0  0  0  0  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00

```

----- FREQUENCY -----

FREQUENCY= 2.4500E+03 MHZ
WAVELENGTH= 1.2237E-01 METERS

APPROXIMATE INTEGRATION EMPLOYED FOR SEGMENTS MORE THAN 1.000
WAVELENGTHS APART

--- STRUCTURE IMPEDANCE LOADING ---

THIS STRUCTURE IS NOT LOADED

--- ANTENNA ENVIRONMENT ---

FREE SPACE

--- MATRIX TIMING ---

FILL= 0.000 SEC., FACTOR= 0.000 SEC.

--- ANTENNA INPUT PARAMETERS ---

TAG	SEG.	VOLTAGE (VOLTS)		CURRENT (AMPS)		IMPEDANCE (OHMS)	
ADMITTANCE (MHOS)	POWER	REAL	IMAG.	REAL	IMAG.	REAL	IMAG.
NO. NO.	(WATTS)						
1	7	1.00000E+00	0.00000E+00	1.01465E-02	-4.06074E-03	8.49497E+01	3.39977E+01
1.01465E-02	-4.06074E-03	5.07327E-03					

--- CURRENTS AND LOCATION ---

DISTANCES IN WAVELENGTHS

SEG. NO.	TAG NO.	COORD. OF SEG. CENTER			SEG. LENGTH	--- CURRENT (AMPS) ---			PHASE
		X	Y	Z		REAL	IMAG.	MAG.	
1	1	0.0000	0.0000	-0.2308	0.03847	1.5606E-03	-8.7805E-04	1.7906E-03	-29.364
2	1	0.0000	0.0000	-0.1924	0.03847	4.0238E-03	-2.1901E-03	4.5812E-03	-28.559
3	1	0.0000	0.0000	-0.1539	0.03847	6.0983E-03	-3.1948E-03	6.8844E-03	-27.649
4	1	0.0000	0.0000	-0.1154	0.03847	7.8071E-03	-3.9094E-03	8.7312E-03	-26.599
5	1	0.0000	0.0000	-0.0769	0.03847	9.0859E-03	-4.3005E-03	1.0052E-02	-25.329
6	1	0.0000	0.0000	-0.0385	0.03847	9.8782E-03	-4.3240E-03	1.0783E-02	-23.640
7	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.03847	1.0147E-02	-4.0607E-03	1.0929E-02	-21.812
8	1	0.0000	0.0000	0.0385	0.03847	9.8782E-03	-4.3240E-03	1.0783E-02	-23.640
9	1	0.0000	0.0000	0.0769	0.03847	9.0859E-03	-4.3005E-03	1.0052E-02	-25.329
10	1	0.0000	0.0000	0.1154	0.03847	7.8071E-03	-3.9094E-03	8.7312E-03	-26.599
11	1	0.0000	0.0000	0.1539	0.03847	6.0983E-03	-3.1948E-03	6.8844E-03	-27.649
12	1	0.0000	0.0000	0.1924	0.03847	4.0238E-03	-2.1901E-03	4.5812E-03	-28.559
13	1	0.0000	0.0000	0.2308	0.03847	1.5606E-03	-8.7805E-04	1.7906E-03	-29.364
14	2	0.5001	0.0000	-0.2308	0.03847	6.3631E-04	9.5841E-05	6.4348E-04	8.566
15	2	0.5001	0.0000	-0.1924	0.03847	1.6382E-03	2.4562E-04	1.6565E-03	8.527
16	2	0.5001	0.0000	-0.1539	0.03847	2.4799E-03	3.7050E-04	2.5074E-03	8.497
17	2	0.5001	0.0000	-0.1154	0.03847	3.1720E-03	4.7269E-04	3.2070E-03	8.476
18	2	0.5001	0.0000	-0.0769	0.03847	3.6893E-03	5.4882E-04	3.7299E-03	8.461
19	2	0.5001	0.0000	-0.0385	0.03847	4.0094E-03	5.9585E-04	4.0535E-03	8.453
20	2	0.5001	0.0000	0.0000	0.03847	4.1179E-03	6.1176E-04	4.1631E-03	8.450
21	2	0.5001	0.0000	0.0385	0.03847	4.0094E-03	5.9585E-04	4.0535E-03	8.453
22	2	0.5001	0.0000	0.0769	0.03847	3.6893E-03	5.4882E-04	3.7299E-03	8.461
23	2	0.5001	0.0000	0.1154	0.03847	3.1720E-03	4.7269E-04	3.2070E-03	8.476
24	2	0.5001	0.0000	0.1539	0.03847	2.4799E-03	3.7050E-04	2.5074E-03	8.497
25	2	0.5001	0.0000	0.1924	0.03847	1.6382E-03	2.4562E-04	1.6565E-03	8.527
26	2	0.5001	0.0000	0.2308	0.03847	6.3631E-04	9.5841E-05	6.4348E-04	8.566

--- POWER BUDGET ---

```

INPUT POWER = 5.0733E-03 WATTS
RADIATED POWER= 5.0733E-03 WATTS
STRUCTURE LOSS= 0.0000E+00 WATTS
NETWORK LOSS = 0.0000E+00 WATTS
EFFICIENCY = 100.00 PERCENT

**** DATA CARD NO. 4 RP 0 1 1 0 9.00000E+01 0.00000E+00 1.00000E+00
1.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00

--- RADIATION PATTERNS ---

-- ANGLES -- - POWER GAINS - --- POLARIZATION --- --- E(THETA) --- ---
E(PHI) ---
THETA PHI MAJOR MINOR TOTAL AXIAL TILT SENSE MAGNITUDE
PHASE MAGNITUDE PHASE
DEGREES DEGREES DB DB DB RATIO DEG. VOLTS/M
DEGREES VOLTS/M DEGREES
90.00 0.00 -0.78 -999.99 -0.78 0.00000 0.00 LINEAR 5.04369E-01 47.76
0.00000E+00 0.00

**** DATA CARD NO. 5 EN 0 0 0 0 0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00
0.00000E+00 0.00000E+00 0.00000E+00

RUN TIME = 0.000

```

出力ファイルより、

$$Z_{in} = 84.9 + j34, Y_{in} = 0.0102 - j0.00407$$

そのとき、図 2(a)のダイポールアンテナ 2 の短絡ポート電流は

$$I_2 = 0.00412 + j 0.000612$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.0102 - j0.00407 & 0.00412 + j 0.000612 \\ 0.00412 + j 0.000612 & 0.0102 - j0.00407 \end{bmatrix}$$

$$Z = Y^{-1} = \begin{bmatrix} 84.9 + j48.2 & -18.7 - j32.1 \\ -18.7 - j32.1 & 84.9 + j48.2 \end{bmatrix}$$

(3.1 の結果に非常に近い)

3.2.2 ポート 2 に Z_L を付加した場合のポート 1 の入力インピーダンス

【上の Z 行列より】

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \text{ and } V_2 = -Z_L I_2 \quad (\text{負号は電流の向きの定義の違いによる})$$

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \\ V_2 = -Z_L I_2 \end{cases}, \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ -Z_L I_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases}, \begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}I_1 \end{cases}, V_1 = Z_{11}I_1 - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}I_1$$

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_L + Z_{22}}$$

$Z_L = -j50$ の場合、

$$Z_{in} \cong 93.2 + j34.2$$

【NEC2 の入力ファイル (Port2 に集中定数素子 $Z = -j50$ を接続)】

```
CM DIPOLE ANTENNA
CE
GW 1 13 0 0 -0.0306 0 0 0.0306 .000122
GW 2 13 0.0612 0 -0.0306 0.0612 0 0.0306 .000122
GE
LD 4 2 7 7 0. -50.
FR 0 1 0 0 2450. 100.
EX 0 1 7 1 1.0 0.0
XQ
RP 0 1 1 0000 90. 0. 1. 1.
EN
```

上記ファイルを実行すると、

$$Z_{in} \cong 93.3 + j34.2$$

と、アンテナ系等価回路モデル表現での計算と同様の結果が得られる。

3.2.3 ポートに集中定数素子を接続した場合の消費電力

```
CM DIPOLE ANTENNA
CE
GW 1 13 0 0 -0.0306 0 0 0.0306 .000122
GW 2 13 0.0612 0 -0.0306 0.0612 0 0.0306 .000122
GE
LD 4 2 7 7 50. -50.
FR 0 1 0 0 2450. 100.
EX 0 1 7 1 1.0 0.0
XQ
RP 0 1 1 0000 90. 0. 1. 1.
EN
```

ポート 2 に $Z_L = 50 + j50$ を接続すると、NEC2 の出力ファイルでは

```
...
--- CURRENTS AND LOCATION ---
DISTANCES IN WAVELENGTHS

SEG. TAG   COORD. OF SEG. CENTER   SEG.   --- CURRENT (AMPS) ---
NO.  NO.     X       Y       Z       LENGTH   REAL   IMAG.   MAG.   PHASE
...
   20    2    0.5001  0.0000  0.0000  0.03847  2.2379E-03  1.6879E-03  2.8030E-03  37.025
...
```

--- POWER BUDGET ---

INPUT POWER = 4.6607E-03 WATTS
RADIATED POWER= 4.4643E-03 WATTS
STRUCTURE LOSS= 1.9643E-04 WATTS
NETWORK LOSS = 0.0000E+00 WATTS
EFFICIENCY = 95.79 PERCENT

が得られる。100%-95.79%=4.21%が Z_L で消費されている。

この値は電気回路学の消費電力 $\frac{\text{Re}[Z|I|^2]}{2}$ の計算値と一致している。

参考文献

[1] モーメント法入門

<http://www-antenna.ee.titech.ac.jp/~hira/hobby/edu/em/mom/mom2/index-j.html>

[2] J.L. Volakis et al., Finite Element Method for Electromagnetics, IEEE Press, p.160, NY, 1998.

[3] <http://www.nec2.org/>

付録

A HFSS でのインピーダンス行列の計算方法

HFSS は電界ベースの有限要素法解析[2]を行うので、次のヘルムホルツの波動方程式を解いている。

$$\nabla \times \left(\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\mu_r} \right) - k_0^2 \varepsilon_r \mathbf{E} = -jk_0 \eta_0 \mathbf{i}_e - \nabla \times \left(\frac{\mathbf{i}_m}{\mu_r} \right) \quad (\text{A-1})$$

これからは筆者の予想も含まれるから、正確でないかもしれないが、解析は次の順に行われているはずである。

1) 集中定数的ポートに表面インピーダンス $Z_s = Z_0 \frac{w}{\ell}$ (ユーザーが任意の値を指定) を

与える。これは集中定数的ポートの内部インピーダンスをシミュレートするためのものである。

【参考】

$$\mathbf{E}_t = Z_s \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t$$

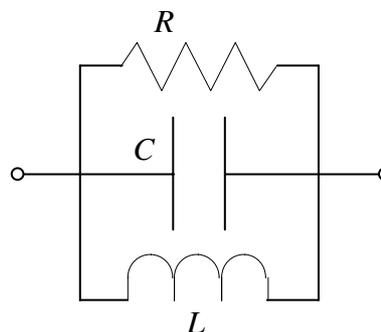
HFSS では下記の並列 R,L,C の値を設定する。

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_t} \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l}_t = V \\ \int_{\Gamma_w} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t) \cdot \frac{(-\hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{l}_w)}{= \hat{\mathbf{i}}_t} = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \iint_S \mathbf{E}_t \cdot \hat{\mathbf{i}}_t dS = V \int_{\Gamma_w} d\ell_w \\ \iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t) \cdot \hat{\mathbf{i}}_t dS = I \int_{\Gamma_t} d\ell_t \end{cases}$$

$$V = Z_0 I$$



$$\frac{\iint_S \mathbf{E}_t \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell dS}{\int_{\Gamma_w} dl_w} = Z \frac{\iint_S (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t) \cdot \hat{\mathbf{i}}_\ell dS}{\int_{\Gamma_\ell} dl_\ell}$$

$$\mathbf{E}_t = Z_0 \frac{\int_{\Gamma_w} dl_w}{\int_{\Gamma_\ell} dl_\ell} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t$$

$= Z_s$

上式を $\mathbf{E}_t = Z_s \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t$ と比較すると次の関係が得られる。

$$Z_s = Z_0 \frac{w}{\ell}$$

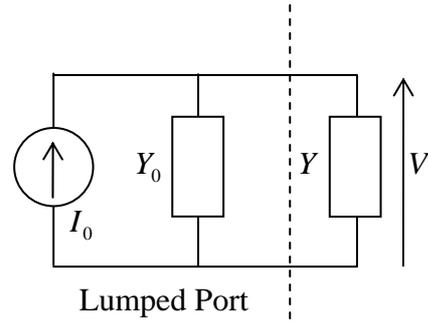
- 2) 励振電流源 \mathbf{i}_e (または磁流源 \mathbf{i}_m) を与える。
- 3) 電磁界解析を実行する。
- 4) 電磁界解析結果の電界より、集中定数的ポートの電圧 $\int_{\Gamma_\ell} \mathbf{E}_t \cdot d\mathbf{l}_\ell = V$ が計算できる。
- 5) 励振電流より、集中定数的ポートへの印加電流 $\int_{\Gamma_w} \mathbf{i}_e \cdot \frac{(-\hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{l}_w)}{= \hat{\mathbf{i}}_\ell} = I_0$ が計算できる。

【補足】

電磁界解析結果の磁界による電流値

$$\int_{\Gamma_w} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_t) \cdot \frac{(-\hat{\mathbf{n}} \times d\mathbf{l}_w)}{= \hat{\mathbf{i}}_\ell} = I$$

は一般には I_0 とは異なる。なぜならば、右図のように集中定数ポートの外部インピーダンスの違いにより、集中定数ポートの内部インピーダンスにも電流が流れ、 I_0 と Y_0 に流れる電流の和が I になるからである。



- 6) 4) の V および 5) の I_0 から、自己アドミタンス $Y_{11} = Y_0 + Y = \frac{I_0}{V}$ が計算できる。もちろん

複数ポートの場合も同様にして相互アドミタンスも計算できる。つまり \mathbf{Y} 行列の計算ができる。 \mathbf{Z} 行列は \mathbf{Y} 行列の逆行列で計算できる。

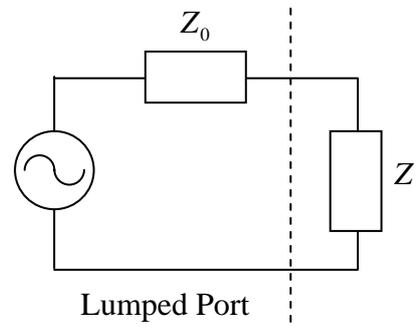
【補足 (内部インピーダンス値を変更する)】

各ポート i で次式が成り立つ。

$$\begin{cases} V'_i = V_i + Z_{0i} I'_i \\ I'_i = I_i \end{cases}$$

$$\{V\} = [Z]\{I\}$$

$$\{V'\} - \text{diag}[Z_{0i}]\{I'\} = [Z]\{I'\}$$



$$\{V'\} = \frac{[[Z] + \text{diag}[Z_{0i}]]}{=[Z]}\{I'\}$$

このように対角要素にそのポートの内部インピーダンスを加算するのみで各ポートの内部インピーダンスの変更は可能である。

7) Sパラメータを計算したいときは、

$$S_{11} = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0}$$

で反射係数を計算できる。集中定数的ポートには内部インピーダンスを指定しないと ($Z_0 = 0$ または $Z_0 = \infty$ だと) 常に全反射になってしまうので、この意味で集中定数的ポートには内部インピーダンスを定義している。

一般の N ポートでは、付録 B のように Z 行列 \Leftrightarrow S 行列の変換が可能である。

B Z 行列 \Leftrightarrow S 行列の変換

V, I と a, b の間には次の関係がある。

$$\begin{cases} \mathbf{V} = \text{diag}(\sqrt{Z_i})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{I} = \text{diag}(1/\sqrt{Z_i})(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} = \frac{\text{diag}(1/\sqrt{Z_i})\mathbf{V} + \text{diag}(\sqrt{Z_i})\mathbf{I}}{2} \\ \mathbf{b} = \frac{\text{diag}(1/\sqrt{Z_i})\mathbf{V} - \text{diag}(\sqrt{Z_i})\mathbf{I}}{2} \end{cases} \quad (\text{B-1})$$

ここで、 $\text{diag}(1/\sqrt{Z_i})\text{diag}(\sqrt{Z_i}) = U$ (単位行列) である。

$S \Rightarrow Z$

$S \Rightarrow Z$ は、ポート i にインピーダンス Z_i を接続すると、

$$\mathbf{b} = \mathbf{S}\mathbf{a}$$

式(B-1)より、

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \frac{D^{-1}\mathbf{V} + D\mathbf{I}}{2} \\ \mathbf{b} = \frac{D^{-1}\mathbf{V} - D\mathbf{I}}{2} \end{cases}$$

ここで、 $D = \text{diag}(\sqrt{Z_1}, \sqrt{Z_2}, \dots, \sqrt{Z_n})$

$$\frac{D^{-1}\mathbf{V} - D\mathbf{I}}{2} = S \left[\frac{D^{-1}\mathbf{V} + D\mathbf{I}}{2} \right]$$

$$D^{-1}\mathbf{V} - D\mathbf{I} = S(D^{-1}\mathbf{V} + D\mathbf{I})$$

$$D^{-1}\mathbf{V} - D\mathbf{I} = SD^{-1}\mathbf{V} + SD\mathbf{I}$$

$$D^{-1}\mathbf{V} - SD^{-1}\mathbf{V} = D\mathbf{I} + SD\mathbf{I}$$

$$(U - S)D^{-1}\mathbf{V} = (U + S)D\mathbf{I} \quad (U \text{ は単位行列})$$

$$(U - S)D^{-1}\mathbf{V} = (U + S)D\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = ((U - S)D^{-1})^{-1}(U + S)D\mathbf{I}$$

$$\mathbf{V} = D(U - S)^{-1}(U + S)D\mathbf{I}$$

なので、 $\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$ と比較して

$$\begin{aligned} Z &= D(U - S)^{-1}(U + S)D \\ &= \text{diag}(\sqrt{Z_1}, \sqrt{Z_2}, \dots, \sqrt{Z_n})(U - S)^{-1}(U + S)\text{diag}(\sqrt{Z_1}, \sqrt{Z_2}, \dots, \sqrt{Z_n}) \end{aligned}$$

ここで、 $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z_0$ のときは、 $Z = (U - S)^{-1}(U + S)Z_0$

$Z = D(U - S)^{-1}(U + S)D$ を S について解くと、

$$(U - S)D^{-1}Z = (U + S)D$$

$$D^{-1}Z - SD^{-1}Z = D + SD$$

$$D^{-1}Z - D = SD^{-1}Z + SD$$

$$D^{-1}Z - D = S(D^{-1}Z + D)$$

$$\begin{aligned} S &= (D^{-1}Z - D)(D^{-1}Z + D)^{-1} \\ &= D^{-1}(Z - D^2)(D^{-1}(Z + D^2))^{-1} \\ &= D^{-1}(Z - D^2)(Z + D^2)^{-1}D \end{aligned}$$

ここで、 $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z_0$ のときは、 $S = (Z - Z_0U)(Z + Z_0U)^{-1}$

$Z \Rightarrow S$

$Z \Rightarrow S$ は、ポート i にインピーダンス Z_i を接続すると、

$$\mathbf{V} = Z\mathbf{I}$$

式(B-1)より、

$$\begin{cases} \mathbf{V} = D(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ \mathbf{I} = D^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \end{cases}$$

ここで、 $D = \text{diag}(\sqrt{Z_1}, \sqrt{Z_2}, \dots, \sqrt{Z_n})$

$$D(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = Z[D^{-1}(\mathbf{a} - \mathbf{b})]$$

$$D\mathbf{a} + D\mathbf{b} = ZD^{-1}\mathbf{a} - ZD^{-1}\mathbf{b}$$

$$ZD^{-1}\mathbf{b} + D\mathbf{b} = ZD^{-1}\mathbf{a} - D\mathbf{a}$$

$$(ZD^{-1} + D)\mathbf{b} = (ZD^{-1} - D)\mathbf{a}$$

$$\mathbf{b} = (ZD^{-1} + D)^{-1}(ZD^{-1} - D)\mathbf{a}$$

なので、 $\mathbf{b} = S\mathbf{a}$ と比較して

$$\begin{aligned} S &= (ZD^{-1} + D)^{-1}(ZD^{-1} - D) \\ &= ((Z + D^2)D^{-1})^{-1}(Z - D^2)D^{-1} \\ &= D(Z + D^2)^{-1}(Z - D^2)D^{-1} \end{aligned}$$

ここで、 $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z_0$ のときは、 $S = (Z + Z_0U)^{-1}(Z - Z_0U)$

$S = (ZD^{-1} + D)^{-1}(ZD^{-1} - D)$ を Z について解くと、

$$(ZD^{-1} + D)S = (ZD^{-1} - D)$$

$$ZD^{-1}S + DS = ZD^{-1} - D$$

$$ZD^{-1}S - ZD^{-1} = -D - DS$$

$$ZD^{-1}(S - U) = -D(S + U)$$

$$Z = -D(S + U)(D^{-1}(S - U))^{-1}$$

$$= -D(S + U)(S - U)^{-1}D$$

ここで、 $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_n = Z_0$ のときは、 $Z = Z_0(S + U)(U - S)^{-1}$