界等価定理と境界要素法

2007/5/7 平野拓一（東京工業大学）

キーワード: 界等価定理、境界要素法、モーメント法
Keywords: field equivalence principle, boundary element method (BEM), method of moments (MoM)

1. はじめに

境界要素法(BEM)あるいはモーメント法(MoM)の理論的基礎である界等価定理(field equivalence principle)との関係を説明する。

2. ポアソンの方程式

まず、簡単のために静電界の問題を考える。

2.1 ポアソンの方程式（Poisson Equation）

$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$

に $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ 代入して、

$\nabla \cdot (\varepsilon \mathbf{E}) = \rho$

ここで、ε は一様で場所に依存しないとすると

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

さらに、$\mathbf{E} = -\nabla \phi$ を代入して、

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

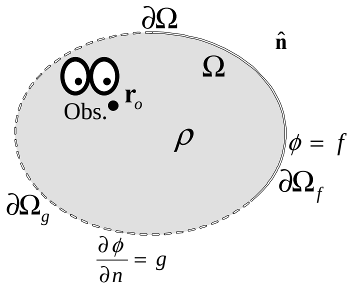
したがって、ポテンシャルが満たす微分方程式はポアソンの方程式である。ここではポアソンの方程式の境界値問題を考えよう。

【境界値問題】

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (\text{in } \ \Omega)$$

$$\begin{cases} \phi = f & (\text{on } \partial\Omega_f) \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = g & (\text{on } \partial\Omega_g) \end{cases}$$

$\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ (in Ω), f (on $\partial\Omega_f$), g (on $\partial\Omega_g$)を与え、ϕについて解く。ここで、$\partial\Omega = \partial\Omega_f + \partial\Omega_g$は領域$\Omega$の境界である。



2.2 解の一意性（Uniqueness Theorem）

上の問題の解ϕは一意に定まる。

証明

2通りの解(ϕ, ϕ')があったとする。

$\Delta\phi \overset{\triangle}{=} \phi - \phi'$ と定義する。

ϕもϕ'も解と仮定しているので、両方ともポアソンの方程式と境界条件を満足する。

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla^2\phi' = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \end{cases} \quad (\text{in } \Omega) \tag{1}$$

$$\begin{cases} \phi = f \\ \phi' = f \end{cases} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial n} = g \\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial n} = g \end{cases} \quad (\text{on } \partial\Omega) \tag{3}$$

式(1)より、

$$\nabla^2(\Delta\phi) = \nabla^2\phi - \nabla^2\phi' = 0 \tag{4}$$

式(2), 式(3)より、

$$\Delta\phi\Big|_{\text{on }\partial\Omega_f} = \phi\Big|_{\text{on }\partial\Omega_f} - \phi'\Big|_{\text{on }\partial\Omega_f} = 0 \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial\Delta\phi}{\partial n}\right|_{\text{on }\partial\Omega_g} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{\text{on }\partial\Omega_g} - \left.\frac{\partial\phi'}{\partial n}\right|_{\text{on }\partial\Omega_g} = 0 \tag{6}$$

ここで、ベクトル公式$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\phi\nabla^2\psi$より、

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)=\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla^2\phi$$

$$|\nabla\phi|^2=\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)-\phi\nabla^2\phi$$

$\phi\to\Delta\phi$と置き換えて、空間Ωで両辺体積積分する。

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega|\nabla(\Delta\phi)|^2dv&=\iiint_\Omega\nabla\cdot\{(\Delta\phi)\nabla(\Delta\phi)\}dv-\iiint_\Omega(\Delta\phi)\underbrace{\nabla^2(\Delta\phi)}_{=0}dv\\&=\oiint_{\partial\Omega}\{(\Delta\phi)\nabla(\Delta\phi)\}\cdot d\mathbf{S}\\&=\oiint_{\partial\Omega}\{(\Delta\phi)\nabla(\Delta\phi)\}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS\\&=\oiint_{\partial\Omega}\{(\Delta\phi)\frac{\partial(\Delta\phi)}{\partial n}\}dS=0\end{aligned}\tag{7}$$

最後の=0 は式(5), 式(6)より。

ここで、$\mathbf{A}$を任意のベクトルとして、

$$\iiint_\Omega|\mathbf{A}|^2dv=0$$

ならば

$$|\mathbf{A}|^2=0\quad(\text{in }\ \Omega)$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{0}\quad(\text{in }\ \Omega)$$

よって、

$$\nabla(\Delta\phi)=\mathbf{0}\quad(\text{in }\ \Omega)$$

$$\Delta\phi=\text{const.}=c\quad(\text{in }\ \Omega)$$

$\Delta\phi=\phi-\phi'$はΩ内のいたるところで場所の関数ではなく、一定値となる（電位の基準を変えただけに他ならないので$c=0$と考えてもよい)。■

【ポアソンの方程式が一意な解を持つための境界条件について】

境界$\partial\Omega$のいたるところで$\phi=f$あるは$\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=g$のいずれか一方を指定すれば、$\Omega$内のいたるところで解は一意に定まる。逆に、このように境界条件を指定しなければ解は一意に定まらないことが判明した。$\phi=f$を**ディリクレ(Dirichlet)の境界条件**あるいは**第一種(first kind)境界条件**と言い、その下に微分方程式を解く問題を**ディリクレ問題**と言う。$\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=g$を**ノイマン(Neumann)の境界条件**あるいは**第二種(second kind)境界条件**言い、その下に微分方程式を解く問題を**ノイマン問題**と言う。境界の一部をディリクレ条件、他の部分をノイマン条件としてもよい。また、ディリクレ問題とノイマン問題の解は一般には異なるので、境界上の同じ位置で「$\phi=f$と$\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=g$

の両方」を独立に指定してしまうと一般には解が存在するとは限らない。境界上の同じ位置で $\phi = f$ と $\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = g$ の両方を指定する境界条件を**コーシー(Cauchy)の境界条件**と言い、その問題コーシー問題と言う。**ディリクレ問題**と**ノイマン問題**の線形和はもちろん解になり、境界で $\phi + a\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ の値を指定する境界条件を**第三種(third kind)境界条件**と言う。

解の一意性は非常に重要である。なぜならば、電気映像法などの解法では非常に技巧的な方法で解（界）を求めるが、１つ解が求まっても他に解があるかもしれない。しかし、解の一意性の定理があると、１つ解が求まったらそれは唯一の解であり、他に解を探す必要がないからである。

2.3 グリーン関数による解の表現

この節ではポアソンの方程式の有限境界がある場合の一般解を導出し、その意味を考察する。その解を先に書くと次のようになる。

$$\boxed{\phi(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dv_s + \underbrace{\oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial \phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dS_s}_{\text{電気一重層}} - \underbrace{\oiint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{r}_s) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}\right) dS_s}_{\text{電気二重層}}}$$

2.3.1 準備

ラプラスの方程式 $\nabla^2 \phi = 0$ を満たし、動径 r にしか依存しない関数 $\phi = f(r)$ の形を求める。

$$\nabla f(r) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} f(r) \\ \dfrac{\partial}{\partial y} f(r) \\ \dfrac{\partial}{\partial z} f(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(r)}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(r)}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f(r)}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial z} \end{bmatrix} = f'(r) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} \end{bmatrix} = \frac{f'(r)}{r} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$$

ここで、$\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}$, $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z}{r}$ である。

また、

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{g(r)\mathbf{r}\} &= \underbrace{\nabla g(r)}_{=\frac{g'(r)}{r}\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r} + g(r) \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{r}}_{=3} \\ &= g'(r)r + 3g(r) \end{aligned}$$

$$\underbrace{\nabla\cdot\nabla f(r)}_{=\nabla^2 f}=\nabla\cdot\left(\frac{f'(r)}{r}\mathbf{r}\right)$$

$$=\left(\frac{f'}{r}\right)'r+3\frac{f'}{r}$$

$$=\frac{f''r-f'\cdot 1}{r^2}r+3\frac{f'}{r}$$

$$=f''+\frac{2f'}{r}$$

$$\nabla^2 f=0$$

となる解を求めると、

$$f''+\frac{2f'}{r}=0$$

$$\frac{f''}{f'}=-\frac{2}{r}$$

両辺rで積分して、

$$\ln f'=-\int\frac{2}{r}dr=-2\ln r+K=\ln r^{-2}+\ln\underbrace{e^K}_{=K'}=\ln\frac{K'}{r^2}$$

$$\therefore\quad f'=\frac{K'}{r^2}$$

さらに両辺rで積分して、

$$\therefore\quad f=-\frac{K'}{r}+K''$$

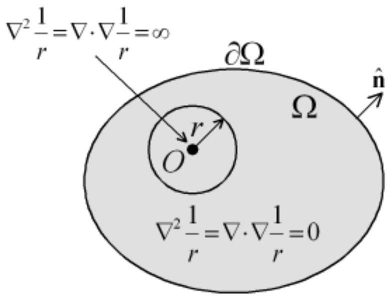
$$f(r)=\frac{1}{r}\quad\rightarrow\quad\nabla^2 f=0\ (r\neq 0)$$ （各自微分して確認！）

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$\iiint_\Omega\nabla\cdot\nabla\frac{1}{r}dv=\oiint_{\partial\Omega}\nabla\frac{1}{r}\cdot d\mathbf{S}=\oiint_{\partial\Omega}\left\{\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}dS=-\oiint_{\partial\Omega}\frac{1}{r^2}dS$$

$$=-\oiint_{\text{原点中心の半径}r\text{の球}}\frac{1}{r^2}dS=-\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\frac{1}{r^2}(r^2\sin\theta\,d\theta d\varphi)$$

$$=-\underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi}\sin\theta\,d\theta}_{=2}\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}d\varphi}_{=2\pi}=-4\pi$$



ということは、

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2 \frac{1}{4\pi r} = -\delta(\mathbf{r})$$

2.3.2 グリーン関数 (Green's Function)

$$G = \frac{1}{4\pi r}$$

をグリーン関数と呼ぶ。すると、2.2.1 より

$$\nabla^2 G = -\delta(\mathbf{r})$$

→グリーン関数は $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 以外はラプラスの方程式を満たす（2.2.1 のように導出が簡単)。

また、波源の位置をずらした次のより一般のグリーン関数も考えられ、波源 $\mathbf{r}_s$ と観測点 $\mathbf{r}_o$ の距離 $|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|$ の関数となる。

$$G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}$$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$$

ここで、上の ∇ は $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s$ の座標系に関する微分を意味する。

$$r = \sqrt{(x_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2 + (z_o - z_s)^2}$$

$$= \left\{ (\underbrace{x_o - x_s}_{=x})^2 + (\underbrace{y_o - y_s}_{=y})^2 + (\underbrace{z_o - z_s}_{=z})^2 \right\}^{1/2}$$

なので、

$$
\begin{aligned}
\nabla &= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial r}{\partial x}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial r}{\partial y}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial r}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{x}{r}+\hat{\mathbf{y}}\frac{y}{r}+\hat{\mathbf{z}}\frac{z}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r}\left(\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}z\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}
\end{aligned}
$$

∇_o は $\mathbf{r}_o$ の座標に関する微分演算とし、∇_s は $\mathbf{r}_s$ の座標に関する微分演算とすると、

$$
\begin{aligned}
\nabla_o &= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x_o}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y_o}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z_o} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_o}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y_o}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z_o} \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial r}{\partial x_o}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial r}{\partial y_o}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial r}{\partial z_o}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{x}{r}+\hat{\mathbf{y}}\frac{y}{r}+\hat{\mathbf{z}}\frac{z}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{1}{r}\left(\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}z\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\nabla
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_s &= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x_s}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y_s}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z_s} \\
&= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_s}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y_s}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z_s} \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial r}{\partial x_s}+\hat{\mathbf{y}}\frac{\partial r}{\partial y_s}+\hat{\mathbf{z}}\frac{\partial r}{\partial z_s}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= \left(-\hat{\mathbf{x}}\frac{x}{r}-\hat{\mathbf{y}}\frac{y}{r}-\hat{\mathbf{z}}\frac{z}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\frac{1}{r}\left(\hat{\mathbf{x}}x+\hat{\mathbf{y}}y+\hat{\mathbf{z}}z\right)\frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial}{\partial r}=-\nabla=-\nabla_o
\end{aligned}
$$

よって、まとめると次の微分演算の関係が成り立つ

$\nabla_o = \nabla$

$\nabla_s = -\nabla_o$

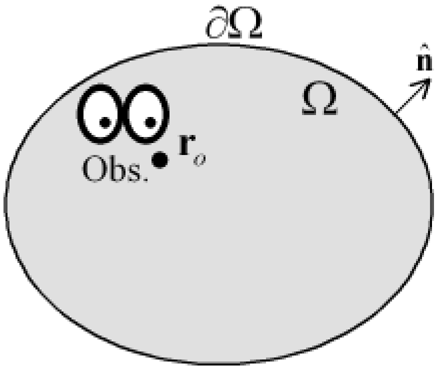
${\nabla_s}^2 = {\nabla_o}^2$

つまり、$\nabla^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$ は都合に応じて次のように微分演算子の座標系を書き換えることができる。

$${\nabla_o}^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$$

$${\nabla_s}^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$$

2.3.3 グリーン関数を用いたポアソンの方程式の解



グリーンの定理

$$\begin{aligned}
&\nabla_s \cdot (G\nabla_s\phi - \phi\nabla_s G) \\
&= \nabla_s G\cdot\nabla_s\phi + G{\nabla_s}^2\phi - \nabla_s\phi\cdot\nabla_s G - \phi{\nabla_s}^2 G \\
&= G{\nabla_s}^2\phi - \phi{\nabla_s}^2 G
\end{aligned}$$

両辺を空間 Ω で体積積分して、

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \nabla_s \cdot (G\nabla_s\phi - \phi\nabla_s G)dv_s &= \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} (G\nabla_s\phi - \phi\nabla_s G)\cdot d\mathbf{S}_s = \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} (G\nabla_s\phi - \phi\nabla_s G)\cdot \hat{\mathbf{n}}dS_s \\
&= \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} (G\frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi\frac{\partial G}{\partial n})dS_s \\
&= \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}dS_s - \oint\!\!\oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}dS_s
\end{aligned}$$

$$\iiint_\Omega (G \underbrace{\nabla_s{}^2\phi}_{=-\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}} - \phi \underbrace{\nabla_s{}^2 G}_{=-\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)})dv_s = \iiint_\Omega \left\{-\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)+\phi(\mathbf{r}_s)\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)\right\}dv_s$$

$$= -\iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s + \underbrace{\iiint_\Omega \phi(\mathbf{r}_s)\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)dv_s}_{=\phi(\mathbf{r}_o)}$$

$$= -\iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s + \phi(\mathbf{r}_o)$$

よって、

$$\boxed{\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}_o) &= \iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon_0}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s + \oiint_{\partial\Omega} G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}dS_s - \oiint_{\partial\Omega}\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}dS_s \\ &= \iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dv_s + \underbrace{\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dS_s}_{\text{電気一重層}} - \underbrace{\oiint_{\partial\Omega}\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}\right)dS_s}_{\text{電気二重層}}\end{aligned}}$$

第１項の寄与は領域Ω内の電荷の寄与を表す。グリーン関数はもちろん自由空間のものを用いて計算されており、境界の外側を考える必要はなく、領域Ωの媒質が無限に広がっているモデルで計算できることを意味する。境界$\partial\Omega$の積分項の寄与は領域Ωの外側の電荷の寄与を表す（説明は 2.3.4 節参照)。第２項は境界上にある等価電荷（電気一重層）からの寄与であり、第１項と同形なので$\varepsilon_0 \dfrac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}$が境界上の等価電荷となることがわかる（下の説明参照)。第３項は境界上にある等価電気双極子（電気二重層）からの寄与である（下の説明参照)。

この一般解の表現においてϕを得たいのに、右辺にϕが残っており、境界$\partial\Omega$上でϕおよび$\partial\phi/\partial n$の値がわかっていなければならず、一見矛盾があるように見える。しかし、多くの問題ではこれらは境界上で与えるものである（例えば、境界の電位を指定、あるいは表面電荷量を指定する)。もちろん、解の一意性の証明で見たように、ϕおよび$\partial\phi/\partial n$の両方を境界$\partial\Omega$上で与えてしまったら解が見つからない（非物理）こともある。一般解の表現のϕおよび$\partial\phi/\partial n$は基本的には与えるものではなく、後で解が見つかった場合のϕおよび$\partial\phi/\partial n$を意味している。

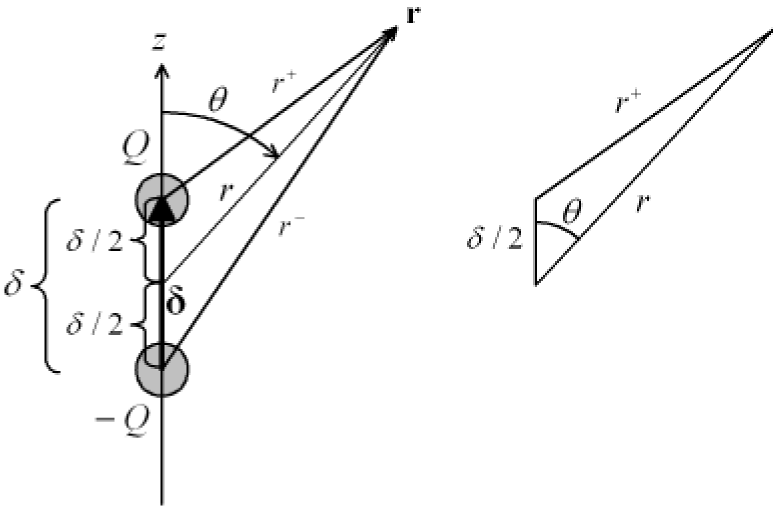
[グリーン関数に関する補足]
解を上のように表現することができるグリーン関数となるための必要十分条件は上の導出を見てもわかるように、グリーン関数は$\nabla^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)$さえ満たしていればどんな関数形をしていてもよい。

2.3.4 電気一重層の説明

$$g(\mathbf{r}_s) = \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\phi}{\partial(-n)} = E_{(-n)}(=\frac{\sigma}{\varepsilon_0})$$

これは物理次元を見ても表面電荷密度に対応する。また、$\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ は電界の次元を持つので、電界の法線成分の不連続を表現している。

2.3.5 電気二重層の説明



上図のような電気双極子(electric dipole)を考える。$\mathbf{p} = Q\boldsymbol{\delta}$ を双極子モーメント(dipole moment)と言う。$\delta << r$ のとき、上の電気双極子が作るポテンシャルは次のようになる。

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^3} = \frac{Q\delta \cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

一方、

$$\frac{\partial G(\mathbf{r}_o ; \mathbf{r}_s)}{\partial n} = \nabla_s G(\mathbf{r}_o ; \mathbf{r}_s) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \nabla_s \left(\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi} \nabla_s \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

ここで、$r = \sqrt{(x_o - x_s)^2 + (y_o - x_s)^2 + (y_o - y_s)^2}$ なので、

$$= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

よって、電気二重層からの寄与の項は

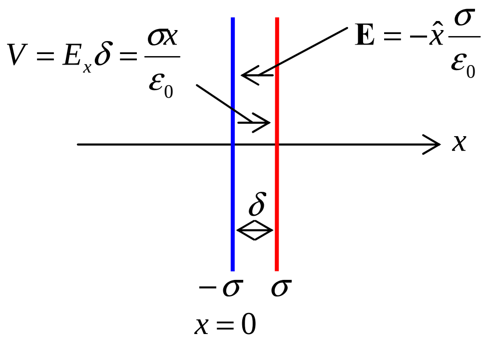
$$\underbrace{-\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{r}_s) \frac{\partial G(\mathbf{r}_o ; \mathbf{r}_s)}{\partial n} dS_s}_{\text{電気二重層}} = -\oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{r}_s) \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} dS_s$$

$$= \oint\!\!\!\oint_{\partial\Omega} \frac{\{\varepsilon\phi(\mathbf{r}_s)(-\hat{\mathbf{n}})\} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\varepsilon r^3} dS_s$$

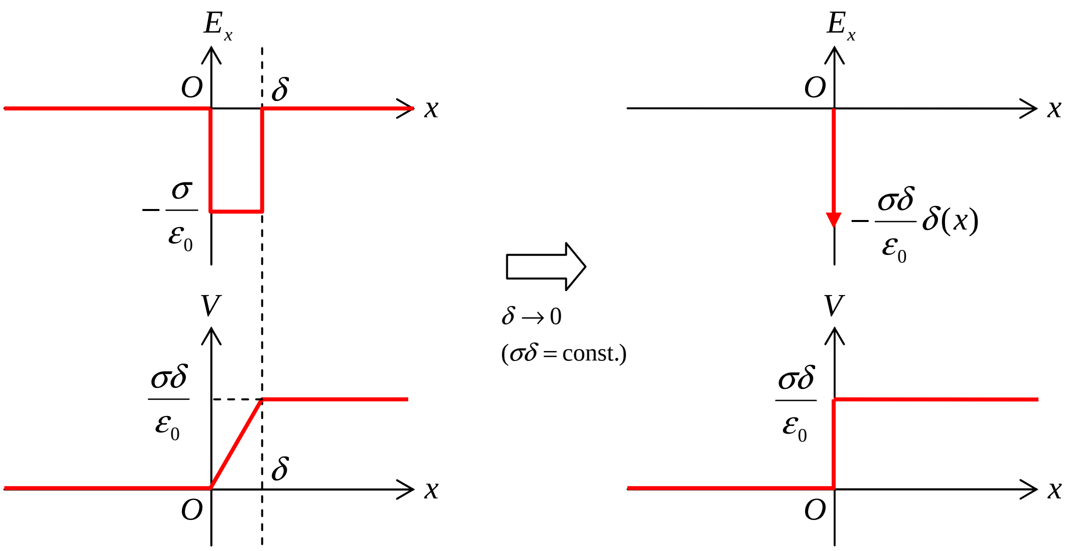
よって、ダイポールモーメント $\varepsilon\phi(\mathbf{r}_s)(-\hat{\mathbf{n}})$ の電気双極子の寄与を重ね合わせたものと等価である。

$f(\mathbf{r}_s)=\phi$ は導体の電位であり、$\dfrac{\partial G(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)}{\partial n}$ はダイポール（電気二重層）の寄与である。表面に無限に薄いコンデンサがあるようなもので、境界において電位をオフセットさせる作用がある。

■電気二重層の電位オフセット効果について（1次元問題）



図のような$\pm\sigma$の面電荷密度、間隔δの電気二重層を考える。$\sigma\delta=\mathrm{const.}$とした状態で$\delta\to 0$の極限を取ったときの電界、電位分布を求めると次のグラフのようになる。

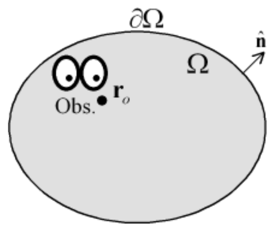


$\pm\sigma$の電荷層の間には非常に強い電界がかっており、面の両側では電位が不連続に異なる。

2.4 境界の等価電荷の意味

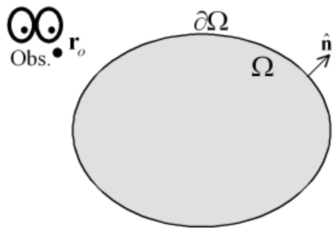
(i) $\mathbf{r}_o$ がΩ内にあるとき

2.3 節の導出と同じになる。



$$\phi(\mathbf{r}_o)=\iiint_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s+\oiint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気一重層}}-\underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$

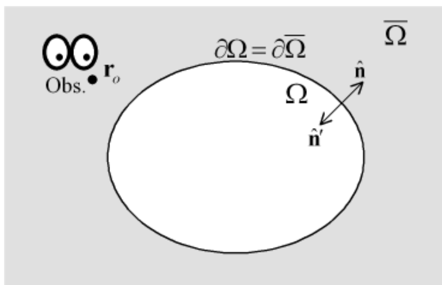
(ii) $\mathbf{r}_o$ が Ω 外にあるとき



2.3 節の導出で、$\mathbf{r}_o=\mathbf{r}_s$ となることがなく、特異点がないので、$\phi(\mathbf{r}_o)$ の項が出てこない。

$$0=\iiint_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s+\oiint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気一重層}}-\underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$

(iii) $\mathbf{r}_o$ が Ω 外=$\overline{\Omega}$ にあるとき（$\overline{\Omega}$ の空間で式を立てる）



$$\phi(\mathbf{r}_o)=\iiint_{\overline{\Omega}}\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s+\oiint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n'}}_{\text{電気一重層}}-\underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n'}}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$

(ii)より、Ω 内の電荷の寄与は $n'=-n$ より、

$$\iiint_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s=-\oiint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気一重層}}-\underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$

$$=\oiint_{\partial\overline{\Omega}}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n'}}_{\text{電気一重層}}-\underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n'}}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$

よって、表面電荷の面積分は$\mathbf{r}_o$のある空間の外側の電荷の寄与を表していることになる。

$$= \iiint_{\overline{\Omega}} \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon} G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dv_s + \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon} G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dv_s$$

$$= \iiint_{全空間} \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon} G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dv_s$$

さらに、

$$-\oiint_{\partial\Omega} \left\{ \underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{電気一重層} - \underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{電気二重層} \right\} dS_s$$

が外側$\overline{\Omega}$の空間にある観測点$\mathbf{r}_o$において、内側Ωの空間の電荷の寄与を表していると、それを符号反転した

$$\oiint_{\partial\Omega} \left\{ \underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{電気一重層} - \underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{電気二重層} \right\} dS_s$$

は外側$\overline{\Omega}$の空間にある観測点$\mathbf{r}_o$において、内側の電荷が作るフィールドの逆符号を表すことになる。従って、(i)の表現において$\mathbf{r}_o$を外側$\overline{\Omega}$に持っていくと両者は相殺して$\overline{\Omega}$において$\phi(\mathbf{r}_o)=0$となる。このように、境界の等価電荷は内側では真のフィールドを、外側では 0 フィールドになるように不連続を作り出している。

2.5 例題

[問題 1] 図のように $(a,0,0)$ に Q [C]の電荷が置かれている。y - z 面は無限導体となっているとき、次の問に答えよ。

(i) 電気影像法(image method)を用いて電荷が受ける力を求めよ。また、 $x \geq 0$ の空間の電位と電界を求めよ。

(ii) 無限導体の y - z 面上の電荷分布を求めよ(ヒント: ガウスの法則)。また、 y 軸上の電荷分布のグラフを描け。

(iii)電位を未知数として微分方程式（ポアソンの方程式）＋境界条件を解く解法を考えたとき、電気影像法を用いると、解くべき問題がどのように変わったことになるか？また、解の一意性より、電気影像法で求めた解の正しさを説明せよ。

ポアソンの方程式: $\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$, $\rho =$□

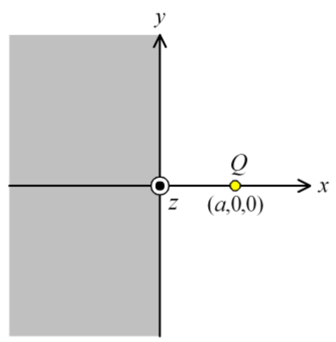
境界条件: □

↓

ポアソンの方程式: $\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$, $\rho =$□

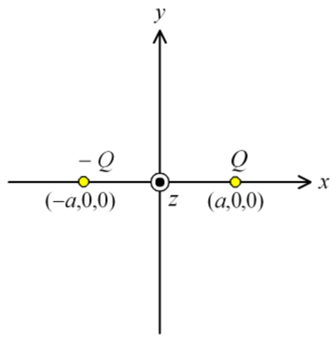
境界条件: □

(iv)界等価定理において、空間 Ω を $x \geq 0$ の半無限空間に選び、空間 Ω の電荷と、空間 Ω の周囲境界 $\partial\Omega$ 上の等価電荷の寄与から空間 Ω 内の電位を求め、



(i)

電気影像法を用いると、x>0 の空間のフィールドは次の図のモデルと等価である。

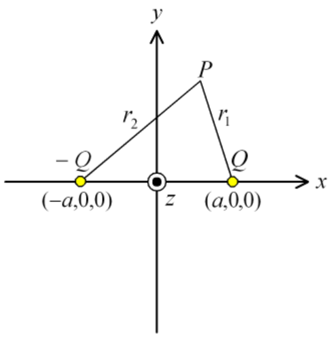


（元のモデルで x<0 の空間に導体があったとしたら、そこの全ての導体は取り除かれて自由空間になっている。ただし、x=0 では電界は x 成分しか持たないので、y-z 面には無限に薄い金属導体があってもよいし、無くてもよい。ただし、今までの知識を使ってフィールドを計算するためには導体を全て取り除いて自由空間にしなければならないから、導体は全て取り除いたと考えて計算を行う）

クーロンの法則より、電荷が受ける力は、

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{E} = Q\left\{\hat{x}\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}\right\} = \hat{x}\frac{-Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2a)^2}$$

つまり、電荷 Q には導体板に引き寄せられる力が働く（導体板表面に逆符号の電荷が誘起され(問(ii)参照)、それに引き寄せられるからである。)。



電位は

$$U = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

電界は $\mathbf{E} = -\nabla U$ で簡単に求まるが、(ii)で求める。

(ii)

任意の点の電界を求める。

Q による電界

$$\mathbf{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1{}^2}\hat{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1{}^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1{}^3}\mathbf{r}_1$$

ここで、

$\mathbf{r}_1 = \mathbf{p} - \mathbf{a}$

より、

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_1}^3}\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ただし、$r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$

-Q による電界

$$\mathbf{E}_2 = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^2}\hat{r} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^2}\cdot\frac{\mathbf{r}_2}{r_2} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^3}\mathbf{r}_2$$

ここで、

$\mathbf{r}_2 = \mathbf{p} - (-\mathbf{a}) = \mathbf{p} + \mathbf{a}$

より、

$$= \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^3}\begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ただし、$r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}$

よって、全電界は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_1}^3}\begin{pmatrix} x-a \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 {r_2}^3}\begin{pmatrix} x+a \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

y 軸上($x = z = 0$)の電界は、

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} -a \\ y \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} a \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+y^2}\right)^3}\begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\hat{x}\frac{2aQ}{4\pi\varepsilon_0\left(\sqrt{a^2+y^2}\right)^3}$$

次に、y-z 面内の電荷分布は

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$$

より、

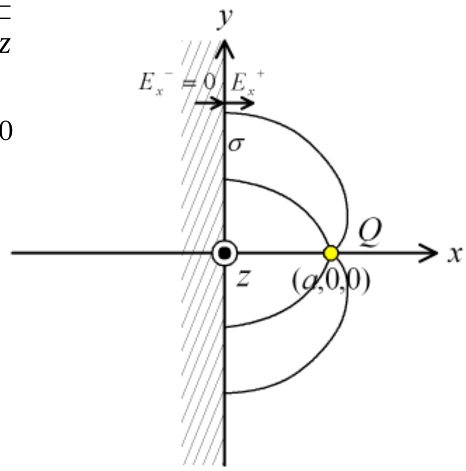
$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad\cdot\cdot\cdot\text{(A)}$$

ここで、y-z 面内(x=0)の電界は

$$\mathbf{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}-a\\ y\\ z\end{pmatrix}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}a\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3}\begin{pmatrix}-2a\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\hat{\mathbf{x}}\frac{-Qa}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+y^2+z}}$$



ところで、面電荷密度σは$\sigma=\rho\Delta x$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{E_x{}^{+}-E_x{}^{-}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{E_x(x+\Delta x)-\overbrace{E_x(x-0)}^{0}}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{\partial E_z}{\partial z}=0$$

より、式(A)は

$$E_x(x+\Delta x)=\frac{\rho\Delta x}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\sigma=\varepsilon_0E_x(x+\Delta x)=\frac{-Qa}{2\pi\sqrt{a^2+y^2+z^2}^3}$$

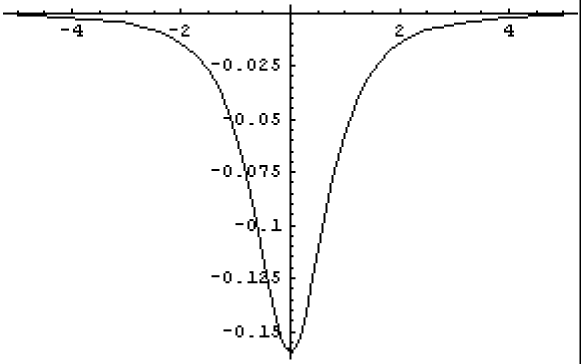
σの y 軸上分布

In[1]:= q = 1.;

a = 1.;

$$\sigma[y\_, z\_] := \frac{-q * a}{2 * \pi * \left(\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}\right)^3};$$

Plot[σ[y, 0], {y, -5, 5}]



Out[4]= - Graphics -

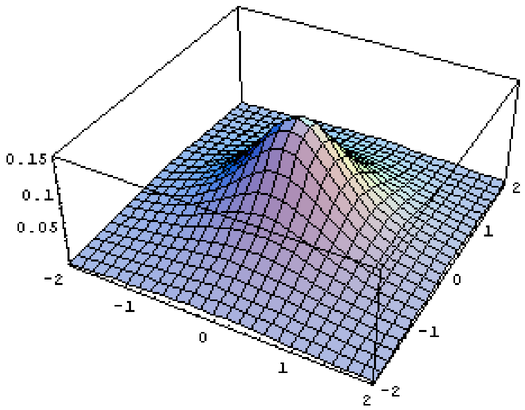
$|\sigma|$ の y-z 面内分布

In[1]:= q = 1.;

a = 1.;

$$\sigma[y\_, z\_] := \frac{-q * a}{2 * \pi * \left(\sqrt{a^2 + y^2 + z^2}\right)^3};$$

Plot3D[Abs[σ[y, z]], {y, -2, 2}, {z, -2, 2},
 PlotRange → All]



Out[4]= - SurfaceGraphics -

(iii)

[復習(界等価定理)]

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}_s) = -\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon} \qquad \text{in} \quad \Omega$$

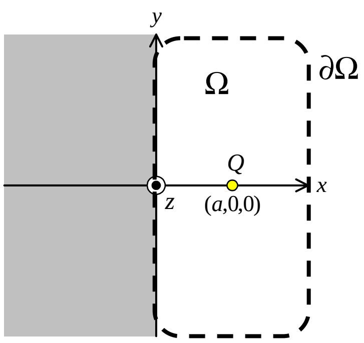
$$\begin{cases} \phi = f \\ \dfrac{\partial \phi}{\partial n} = g \end{cases} \quad \text{on} \ \ \partial\Omega$$

境界上では ϕ の値または $\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ の値を与えれば Ω 内の ϕ は一意に定まる。$\phi = f$ の境界条件を解く問題を**ディリクレ問題**、$\dfrac{\partial \phi}{\partial n} = g$ の境界条件を解く問題を**ノイマン問題**と言う。

↓

$$\phi(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dV_s + \oiint_{\partial\Omega} g(\mathbf{r}_s) G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dS_s - \oiint_{\partial\Omega} f(\mathbf{r}_s) \frac{\partial G(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)}{\partial n} dS_s$$

$$G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}$$

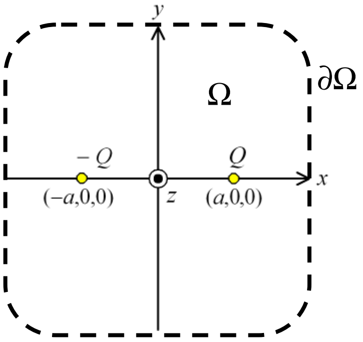


ポアソンの方程式: $\nabla^2 \phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$, $\rho = Q\delta(x-a)\delta(y)\delta(z)$

境界条件: 構造そのままの境界条件, $x = 0$（$y - z$ 平面上)で $\phi = const. = f$ （given)

（ここで、実際には f をどんな値にすればよいのか迷うかもしれないが、これは電位なのでどの値を入れてもよく、得られるポテンシャル ϕ は定数倍の差がある。たとえばこの定数の差は導体の電位であり、これは問題で与えられていないので決定しようがない。電界は電位の微分 $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ なので、得られる電界は電位の定数倍に依らない。また、$\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ はわからないので指定する必要はない。つまり、これはディリクレ問題である。)

↓

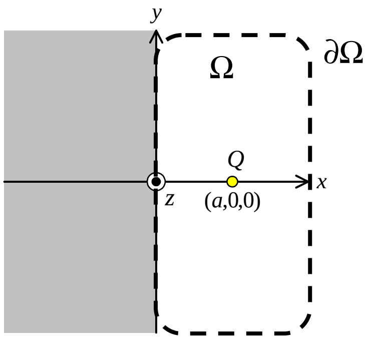


ポアソンの方程式: $\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\varepsilon}$, $\rho = Q\delta(x-a)\delta(y)\delta(z) - Q\delta(x+a)\delta(y)\delta(z)$

境界条件: 自由空間

PEC ありの問題が自由空間の問題に変換された。また、電気影像法で変換した自由空間の問題を解いても元の構造と同様な境界条件を満たすことがわかる。(ii)の $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ は自由空間のポアソンの方程式の解である。そこで、解の一意性より、電気影像法で変換した自由空間の問題の界は元の PEC ありの問題の界と一致することが言える。

[参考：表面電荷を考慮した界の表現]



$$\phi(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dV_s + \oiint_{\partial\Omega} g(\mathbf{r}_s) G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dS_s - \oiint_{\partial\Omega} f(\mathbf{r}_s) \frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n} dS_s$$

$$G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}$$

ここで、Ω の体積は x>0 の半空間とする。すると、∂Ω の面積分の項は y-z 平面からの寄与のみとなる。

$$g(\mathbf{r}_s) = \frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = E_x (= \frac{\sigma}{\varepsilon_0}) = \frac{-Qa}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2 + {y_s}^2 + {z_s}^2}^3}$$

f は導体の電位であり、ここでは $f(\mathbf{r}_s)=0$ とする。他の値でも、$\dfrac{\partial G(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)}{\partial n}$ はダイポール（電気二重層）の寄与なので、y-z 平面に無限に薄いコンデンサがあるようなもので、x>0 への寄与はない。

$\rho(\mathbf{r}_s)=Q\delta(x_s-a)\delta(y_s)\delta(z_s)$

これら ρ, f, g を代入すると、

$$
\begin{aligned}
\phi(\mathbf{r}_o)=&\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x_o-a)^2+{y_o}^2+{z_o}^2}}\\
&+\int_{y_s=-\infty}^{\infty}\int_{z_s=-\infty}^{\infty}\frac{-Qa}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+{y_s}^2+{z_s}^2}^3}\frac{1}{4\pi\sqrt{{x_o}^2+(y_o-y_s)^2+(z_o-z_s)^2}}dy_s dz_s
\end{aligned}
$$

右辺の第一項は電荷 Q からの寄与（グリーン関数は自由空間のものを用いている！）であり、第二項は y-z 面上に誘起された表面電荷（電気一重層）からの寄与である。

ここで、第二項の電気一重層が作るポテンシャル

$$
\int_{y_s=-\infty}^{\infty}\int_{z_s=-\infty}^{\infty}\frac{-Qa}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+{y_s}^2+{z_s}^2}^3}\frac{1}{4\pi\sqrt{{x_o}^2+(y_o-y_s)^2+(z_o-z_s)^2}}dy_s dz_s
$$

の積分は非常に複雑だが、界等価定理から

$$
\frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x_o-a)^2+{y_o}^2+{z_o}^2}}
$$

となるはずである（どのように変形するか？→自分への課題)。

コーヒー ブレイク(グリーンについて)

グリーンの定理（体積積分の値をその境界の周回面積分に変換、あるいはその逆の操作を行うために使われる）はベクトル解析で習うが、電磁気学で頻繁に使う「ガウスの発散定理」や「ストークスの定理」に比べると存在感が薄い。しかし、グリーン関数のアイデアは物理、工学において非常に重要な概念である。ここでは、グリーンの定理に親しみを感じてもらうためにグリーン（人物名）の話をしよう。

グリーン(George Green, 1793-1841)とはどのような人物だったのだろうか？ジョージ・グリーンは 1793 年にイギリスのノッチンガム(Nottingham)という工業都市（地方都市）に生まれ、1841 年に病没している。父親の学問に対する無理解もあって、グリーンは若い頃は学問に専念できず、高等教育は受けていなかった。グリーンの父親は地元で繁盛したパン屋を営んでおり、事業を拡大して製粉業も営むようになり相当な資産家になったようである。グリーンもその後を継ぐことになるが、独学でフランスの論文（イギリスではない）を読んで勉強をし、父親の死後は番頭格の人物に家業を任せて、本格的に学問に専念し、35 才のときにグリーンの公式を含む論文（エッセイと名付けられている）をノッチンガムで発表した（自費出版に近かったらしい)。グリーンが考えたグリーン関数のアイデアの重要性は現在ではよく認識されているが、当時はまわりに理解されず、グリーンの死後(出版の 20 年後)にウィリアム・トムソン（William Thomson, 後にケルヴィン卿となる）にそのアイデアの革新性が認識されるまでは知られていなかった。グリーンの遺族もグリーンがそんなに偉大な人物とは知らなかったために資料は散逸し、肖像画も残っていないそうである。

参考文献

○数学セミナー, 「知られざるグリーン」, 日本評論社, vol.42, no.7, pp.45-49, 2003 年 7 月号

3．ヘルムホルツの方程式

3.1 ヘルムホルツの方程式（Helmholtz Equation）

マクスウェルの方程式:

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_e$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{\rho_m}{\mu}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon}$$

電界 E に対するヘルムホルツ方程式

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_e - \nabla^2 \mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{J}_m \\ &= k^2\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J}_e - \nabla \times \mathbf{J}_m\end{aligned}$$

よって、

$$\frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_e - \nabla^2\mathbf{E} = k^2\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J}_e - \nabla \times \mathbf{J}_m$$

$$\nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J}_e + \nabla \times \mathbf{J}_m + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_e$$

まとめると、

$$\left(\begin{array}{l}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = k^2\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J}_e - \nabla \times \mathbf{J}_m \\ \updownarrow \\ \nabla^2\mathbf{E} + k^2\mathbf{E} = j\omega\mu\mathbf{J}_e + \nabla \times \mathbf{J}_m + \frac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_e\end{array}\right.$$

双対性(Duality)より、

$\underline{\mathbf{E} \to \mathbf{H}}$　　$\varepsilon \leftrightarrow \mu$

$\mathbf{H} \to -\mathbf{E}$

$\mathbf{J}_m \to -\mathbf{J}_e$

$\mathbf{J}_e \to \mathbf{J}_m$

$\rho_e \to \rho_m$

$\rho_m \to -\rho_e$

よって、$\mathbf{H}$ に対するヘルムホルツ方程式は

$$\begin{cases} \nabla\times\nabla\times\mathbf{H} = k^2\mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{J}_m + \nabla\times\mathbf{J}_e \\ \Updownarrow \\ \nabla^2\mathbf{H} + k^2\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{J}_m - \nabla\times\mathbf{J}_e + \dfrac{1}{\mu}\nabla\rho_m \end{cases}$$

3.2 グリーン関数による解の表現

3.2.0 グリーンの定理のベクトル版

$\nabla\cdot(\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P})$

ベクトル公式より、$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}$

$$\begin{cases} \nabla\cdot(\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q}) = (\nabla\times\mathbf{Q})\cdot(\nabla\times\mathbf{P}) - \mathbf{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q} \\ \nabla\cdot(\mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P}) = (\nabla\times\mathbf{P})\cdot(\nabla\times\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P} \end{cases}$$

よって、

$$\nabla\cdot(\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P}) = \mathbf{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q}$$

両辺を体積積分して、

$$\iiint_\Omega (\mathbf{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P} - \mathbf{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q})dv = \oiint_{\partial\Omega} (\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P})\cdot d\mathbf{S}$$

3.2.1 準備

2.3.1 と同様にして、ψ は r のみに依存する関数 $\psi(r)$ とすると

$$\nabla^2\psi = \psi'' + \frac{2\psi'}{r}$$

$$\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$$

となる解を求めると、

$$\psi'' + \frac{2\psi'}{r} + k^2\psi = 0$$

$$r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r} + k^2 r\psi = 0$$

ここで、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\psi+r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)$$

$$=\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{\partial\psi}{\partial r}+r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}=r\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+2\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

より、(ここがほんの少し天下り的だが、数学的に変形したことには間違いない)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi)+k^2(r\psi)=0$$

ここで、

$$\Psi=r\psi$$

とおくと、

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\Psi+k^2\Psi=0$$

これは定数係数線形微分方程式だから簡単に解けて、

$$\Psi=e^{\lambda r}$$

とおき、

$$\left(\lambda^2+k^2\right)e^{\lambda r}=0$$

$$\lambda=\pm jk$$

外($r\rightarrow$大)に広がる波動を表現するために負号を採用する。

$\Psi=Ce^{-jkr}$　　(C は r に依存しない定数)

よって、

$$\psi=C\frac{e^{-jkr}}{r}\quad\blacksquare$$

$$\psi(r)=\frac{e^{-jkr}}{r}\quad\rightarrow\quad\nabla^2\psi+k^2\psi=0\ (r\neq 0)$$

2.3.1 の $\nabla f(r)=\dfrac{f'(r)}{r}\mathbf{r}$ より、

$$\nabla\frac{e^{-jkr}}{r}=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{-jke^{-jkr}\cdot r-e^{-jkr}\cdot 1}{r^2}=-\frac{(jkr+1)e^{-jkr}}{r^3}\mathbf{r}$$

$$\iiint_\Omega\nabla\cdot\nabla\frac{e^{-jkr}}{r}dv=\oiint_{\partial\Omega}\nabla\frac{e^{-jkr}}{r}\cdot d\mathbf{S}=\oiint_{\partial\Omega}\left\{-\frac{(jkr+1)e^{-jkr}}{r^3}\mathbf{r}\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\right\}dS=-\frac{(jkr+1)e^{-jkr}}{r^2}\oiint_{\partial\Omega}dS$$

$$=-\frac{(jkr+1)e^{-jkr}}{r^2}\cdot 4\pi r^2=-4\pi(jkr+1)e^{-jkr}\overset{r\to 0}{=}-4\pi$$

また、

$$\iiint_\Omega \left[\nabla\cdot\nabla\frac{e^{-jkr}}{r} + k^2\frac{e^{-jkr}}{r} \right] dv = \underbrace{\iiint_\Omega \nabla\cdot\nabla\frac{e^{-jkr}}{r} dv}_{\to -4\pi} + k^2 \underbrace{\iiint_\Omega \frac{e^{-jkr}}{r} dv}_{\to 0} \overset{r\to 0}{=} -4\pi$$

ということは、

$$\nabla^2\frac{e^{-jkr}}{r} + k^2\frac{e^{-jkr}}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r})$$

$$\nabla^2\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} + k^2\frac{e^{-jkr}}{4\pi r} = -\delta(\mathbf{r})$$

3.2.2 グリーン関数 (Green’s Function)

$$G = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}$$

をグリーン関数と呼ぶ。すると、3.2.1 より

$$\nabla^2 G + k^2 G = -\delta(\mathbf{r})$$

→グリーン関数は $\mathbf{r}=\mathbf{0}$ 以外は $\nabla^2 G + k^2 G = 0$ を満たす（2.3.1 のように導出が簡単)。
また、波源の位置をずらした次のより一般のグリーン関数も考えられ、波源 $\mathbf{r}_s$ と観測点 $\mathbf{r}_o$ の距離 $|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|$ の関数となる。

$$G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \frac{e^{-jk|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}$$

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) + k^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$$

または、2.3.2 節より、次の 2 式も成り立つ。

$$\nabla_o{}^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) + k^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$$

$$\nabla_s{}^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) + k^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)$$

ベクトル版グリーン関数

$\psi(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \dfrac{e^{-jk|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}$ とし、$\mathbf{a}$ を定数ベクトルとすると、

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \psi(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\mathbf{a}$$

としたら次式が成立する。

$$\nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) + k^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = -\delta(\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s)\mathbf{a}$$

または次の式も成り立つ。

$$\nabla_o{}^2\mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)+k^2\mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)=-\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)\mathbf{a}$$

$$\nabla_s{}^2\mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)+k^2\mathbf{G}(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)=-\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)\mathbf{a}$$

3.2.3 グリーン関数を用いたヘルムホルツの方程式の解

3.2.0 節のベクトル版グリーンの定理

$$\iiint_\Omega(\mathbf{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q})dv=\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P})\cdot d\mathbf{S}$$

において、

$\mathbf{Q}=\mathbf{G}=\psi\mathbf{a}$

$\mathbf{P}=\mathbf{E}$

とおくと、

$$\iiint_\Omega(\mathbf{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q})dv=\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q}-\mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P})\cdot d\mathbf{S}$$

$$\iiint_\Omega\{(\psi\mathbf{a})\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\nabla\times\nabla\times(\psi\mathbf{a})\}dv=\oiint_{\partial\Omega}\{\mathbf{E}\times\nabla\times(\psi\mathbf{a})-(\psi\mathbf{a})\times\nabla\times\mathbf{E}\}\cdot d\mathbf{S}\qquad\text{(A)}$$

$$\left(\begin{array}{l}\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=k^2\mathbf{E}-j\omega\mu\mathbf{J}_e-\nabla\times\mathbf{J}_m\\ \updownarrow\\ \nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=j\omega\mu\mathbf{J}_e+\nabla\times\mathbf{J}_m+\dfrac{1}{\varepsilon}\nabla\rho_e\end{array}\right.$$

$$\text{LHS of (A)}=\iiint_\Omega(\mathbf{Q}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{P}-\mathbf{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{Q})dv$$
$$=\iiint_\Omega\{(\psi\mathbf{a})\cdot\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\nabla\times\nabla\times(\psi\mathbf{a})\}dv$$
$$=\iiint_\Omega\{(\psi\mathbf{a})\cdot(k^2\mathbf{E}-j\omega\mu\mathbf{J}_e-\nabla\times\mathbf{J}_m)-\mathbf{E}\cdot\nabla\times\nabla\times(\psi\mathbf{a})\}dv$$

$$\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})=\psi\nabla\cdot\mathbf{a}+\nabla\psi\cdot\mathbf{a}=\nabla\psi\cdot\mathbf{a}$$
$$\nabla\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})=\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a})=\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a})$$

より、

$$\nabla\times\nabla\times(\psi\mathbf{a})=\underbrace{\nabla\nabla\cdot(\psi\mathbf{a})}_{=\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a})}-\underbrace{\nabla^2(\psi\mathbf{a})}_{\nabla^2(\psi\mathbf{a})=-k^2(\psi\mathbf{a})-\delta(\mathbf{r})\mathbf{a}}=\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a})+k^2(\psi\mathbf{a})+\delta(\mathbf{r})\mathbf{a}$$

$$= \iiint_\Omega \left[(\psi\mathbf{a})\cdot(k^2\mathbf{E} - j\omega\mu\mathbf{J}_e - \nabla\times\mathbf{J}_m) - \mathbf{E}\cdot\left\{\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a}) + k^2(\psi\mathbf{a}) + \delta(\mathbf{r})\mathbf{a}\right\}\right]dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[k^2\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}) - j\omega\mu\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}_e) - \psi(\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{J}_m) - \mathbf{E}\cdot\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a}) - k^2\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}) - \delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})\right]dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[-j\omega\mu\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}_e) - \psi(\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{J}_m) - \mathbf{E}\cdot\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a}) - \delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})\right]dv$$

ここで、ベクトル公式$\nabla\cdot(V\mathbf{A}) = V\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla V$より、

$\mathbf{A}\cdot\nabla V = \nabla\cdot(V\mathbf{A}) - V\nabla\cdot\mathbf{A}$

$\mathbf{A} = \mathbf{E}$, $V = \nabla\psi\cdot\mathbf{a}$ を代入して

$\mathbf{E}\cdot\nabla(\nabla\psi\cdot\mathbf{a}) = \nabla\cdot((\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\mathbf{E}) - (\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\nabla\cdot\mathbf{E}$

$$= \iiint_\Omega \left[-j\omega\mu\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}_e) - \psi(\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{J}_m) - \left\{\nabla\cdot((\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\mathbf{E}) - (\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\nabla\cdot\mathbf{E}\right\} - \delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})\right]dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[-j\omega\mu\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}_e) - \psi(\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{J}_m) - \nabla\cdot((\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\mathbf{E}) + (\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\underbrace{\nabla\cdot\mathbf{E}}_{=\rho_e/\varepsilon} - \delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})\right]dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[-j\omega\mu\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}_e) - \psi(\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{J}_m) + (\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\frac{\rho_e}{\varepsilon}\right]dv$$

$$-\underbrace{\iiint_\Omega \delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})dv}_{=\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)} - \iiint_\Omega \nabla\cdot((\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\mathbf{E})dv$$

$$= \iiint_\Omega \left[-j\omega\mu\psi(\mathbf{a}\cdot\mathbf{J}_e) - \psi(\mathbf{a}\cdot\nabla\times\mathbf{J}_m) + (\nabla\psi\cdot\mathbf{a})\frac{\rho_e}{\varepsilon}\right]dv$$

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) - \oiint_{\partial\Omega}(\nabla\psi\cdot\mathbf{a})(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})dS$$

$$= \mathbf{a}\cdot[\iiint_\Omega \left\{-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_e - \psi\nabla\times\mathbf{J}_m + \frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv - \mathbf{E}(\mathbf{r}_o) - \oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi dS]$$

$$\text{RHS of (A)} = \oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{P}\times\nabla\times\mathbf{Q} - \mathbf{Q}\times\nabla\times\mathbf{P})\cdot d\mathbf{S}$$

$$= \oiint_{\partial\Omega}\left\{\mathbf{E}\times(\nabla\times(\psi\mathbf{a})) - (\psi\mathbf{a})\times(\nabla\times\mathbf{E})\right\}\cdot d\mathbf{S}$$

ここで、ベクトル公式$\nabla\times(V\mathbf{A}) = \nabla V\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}$より、

$\nabla\times(\psi\mathbf{a}) = \nabla\psi\times\mathbf{a} + \psi\underbrace{\nabla\times\mathbf{a}}_{=0} = \nabla\psi\times\mathbf{a}$

また、$\nabla\times\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m$より、

$$= \oiint_{\partial\Omega}\left\{\mathbf{E}\times(\nabla\psi\times\mathbf{a}) - (\psi\mathbf{a})\times(-j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m)\right\}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

ここで、ベクトル公式$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$より、

$\mathbf{E}\times(\nabla\psi\times\mathbf{a}) = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{a})\nabla\psi - (\mathbf{E}\cdot\nabla\psi)\mathbf{a}$

$$= \oiint_{\partial\Omega}\left\{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{a})\nabla\psi - (\mathbf{E}\cdot\nabla\psi)\mathbf{a} - (\psi\mathbf{a})\times(-j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m)\right\}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS$$

$$=\oiint_{\partial\Omega}\left[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})(\nabla\psi\cdot\hat{\mathbf{n}})-(\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{n}})(\mathbf{E}\cdot\nabla\psi)-\{(\psi\mathbf{a})\times(-j\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{J}_m)\}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right]dS$$

$$=\oiint_{\partial\Omega}\left[\mathbf{a}\cdot\left\{\underbrace{\mathbf{E}(\nabla\psi\cdot\hat{\mathbf{n}})-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\nabla\psi)}_{=(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi}\right\}-\{(\psi\mathbf{a})\times(-j\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{J}_m)\}\cdot\hat{\mathbf{n}}\right]dS$$

ここで、ベクトル公式 $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$ より、
$\mathbf{E}(\nabla\psi\cdot\hat{\mathbf{n}})-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\nabla\psi)=(\nabla\psi\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{E}-(\nabla\psi\cdot\mathbf{E})\hat{\mathbf{n}}=\nabla\psi\times(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}})$

$$=\oiint_{\partial\Omega}\left[\mathbf{a}\cdot\left\{\underbrace{\mathbf{E}(\nabla\psi\cdot\hat{\mathbf{n}})-\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}\cdot\nabla\psi)}_{=(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi}\right\}-\{(-j\omega\mu\mathbf{H}-\mathbf{J}_m)\times\hat{\mathbf{n}}\}\cdot(\psi\mathbf{a})\right]dS$$

$$=\oiint_{\partial\Omega}\left[\mathbf{a}\cdot\{(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi\}-(-j\omega\mu\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}}-\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\cdot(\psi\mathbf{a})\right]dS$$

$$=\mathbf{a}\cdot\oiint_{\partial\Omega}\left[(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi+j\omega\mu(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}})\psi+(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi\right]dS$$

$$\mathbf{a}\cdot[\iiint_{\Omega}\left\{-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_e-\psi\nabla\times\mathbf{J}_m+\frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv-\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)-\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi dS]$$

$$=\mathbf{a}\cdot\oiint_{\partial\Omega}\left[(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi+j\omega\mu(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}})\psi+(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi\right]dS$$

$$\iiint_{\Omega}\left\{-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_e-\psi\nabla\times\mathbf{J}_m+\frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv-\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)-\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi dS$$

$$=\oiint_{\partial\Omega}\left[(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi+j\omega\mu(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}})\psi+(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi\right]dS$$

$$\mathbf{a}\cdot[\iiint_{\Omega}\left\{-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_e-\psi\nabla\times\mathbf{J}_m+\frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv-\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)-\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi dS]$$

$$=\mathbf{a}\cdot\oiint_{\partial\Omega}\left[(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi+j\omega\mu(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}})\psi\right]dS+\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi dS$$

$$\iiint_{\Omega}\left\{-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_e-\psi\nabla\times\mathbf{J}_m+\frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv-\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)-\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi dS$$

$$=\oiint_{\partial\Omega}\left[(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi+j\omega\mu(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}})\psi\right]dS+\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi dS$$

ここで、$\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi dS$ を体積積分に変換する。

ベクトル公式$\nabla\times\left(V\mathbf{A}\right) = \nabla V\times\mathbf{A} + V\nabla\times\mathbf{A}$ より、

$$\nabla\times\left(\psi\mathbf{J}_m\right) = \nabla\psi\times\mathbf{J}_m + \psi\nabla\times\mathbf{J}_m$$

ストークスの定理の 3 次元バージョン $\iiint_\Omega \nabla\times\mathbf{A}dv = \oiint_{\partial\Omega}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{A}dS$ より、

$$\oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{J}_m\times\hat{\mathbf{n}})\psi dS = -\iiint_\Omega(\nabla\psi\times\mathbf{J}_m + \psi\nabla\times\mathbf{J}_m)dv$$

$$\iiint_\Omega\left\{-j\omega\mu\psi\mathbf{J}_e - \psi\nabla\times\mathbf{J}_m + \frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv - \mathbf{E}(\mathbf{r}_o) - \oiint_{\partial\Omega}(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi dS$$
$$= \oiint_{\partial\Omega}\left[(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E})\times\nabla\psi + j\omega\mu(\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}})\psi\right]dS - \iiint_\Omega(\nabla\psi\times\mathbf{J}_m + \psi\nabla\times\mathbf{J}_m)dv$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega\left\{-j\omega\mu\mathbf{J}_e\psi - \mathbf{J}_m\times\nabla\psi + \frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv$$
$$+\oiint_{\partial\Omega}\left[j\omega\mu(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H})\psi + (\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}})\times\nabla\psi - (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi\right]dS$$

3.1 節の双対性より、

$\mathbf{E}\to\mathbf{H}$　　$\varepsilon\leftrightarrow\mu$
$\mathbf{H}\to-\mathbf{E}$
$\mathbf{J}_m\to-\mathbf{J}_e$
$\mathbf{J}_e\to\mathbf{J}_m$
$\rho_e\to\rho_m$
$\rho_m\to-\rho_e$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega\left\{-j\omega\varepsilon\mathbf{J}_m\psi + \mathbf{J}_e\times\nabla\psi + \frac{\rho_m}{\mu}\nabla\psi\right\}dv$$
$$+\oiint_{\partial\Omega}\left[j\omega\varepsilon(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}})\psi - (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{H})\times\nabla\psi - (\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}})\nabla\psi\right]dS$$

3.2.4 周囲境界の等価波源の説明

2.3.3 より、静電界の問題においてポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s + \oiint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気一重層}} - \underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$
$$= \iiint_\Omega\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dv_s + \oiint_{\partial\Omega}\left\{\underbrace{G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)(\nabla_s\phi(\mathbf{r}_s)\cdot\hat{\mathbf{n}})}_{\text{電気一重層}} - \underbrace{\phi(\mathbf{r}_s)(\nabla_s G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\cdot\hat{\mathbf{n}})}_{\text{電気二重層}}\right\}dS_s$$

電界を計算すると、

$$\mathbf{E} = -\nabla_o \phi(\mathbf{r}_o)$$

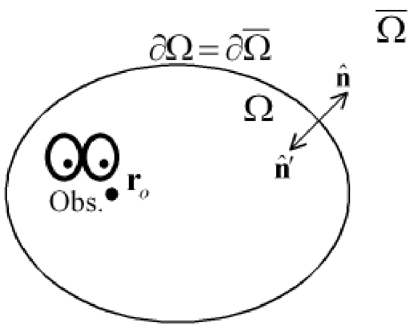
$$= -\iiint_\Omega \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon} \nabla_o G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dv_s - \oiint_{\partial\Omega} \left\{ \underbrace{\nabla_o G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)(\nabla_s \phi(\mathbf{r}_s)\cdot\hat{\mathbf{n}})}_{\text{電気一重層}} \underbrace{-\phi(\mathbf{r}_s)\nabla_o(\nabla_s G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\cdot\hat{\mathbf{n}})}_{\text{電気二重層}} \right\} dS_s$$

$$= \iiint_\Omega \boxed{\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon}} \nabla_s G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) dv_s + \oiint_{\partial\Omega} \left\{ \underbrace{\nabla_s G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\boxed{(\overset{\mathbf{E}}{-\nabla_s \phi(\mathbf{r}_s)}\cdot\hat{\mathbf{n}}')}}_{\text{電気一重層}} \underbrace{-\phi(\mathbf{r}_s)\nabla_o(\nabla_s G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)\cdot\hat{\mathbf{n}}')}_{\text{電気二重層}} \right\} dS_s$$

よって、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega \left\{ -j\omega\mu \overset{\text{電流}}{\boxed{\mathbf{J}_e}} \psi - \overset{\text{磁流}}{\boxed{\mathbf{J}_m}} \times \nabla\psi + \overset{\text{電荷}}{\boxed{\frac{\rho_e}{\varepsilon}}} \nabla\psi \right\} dv$$
$$+ \oiint_{\partial\Omega} \left[-j\omega\mu \boxed{(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})} \psi - \boxed{(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')} \times \nabla\psi + \boxed{(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}')} \nabla\psi \right] dS$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_o) = \iiint_\Omega \left\{ -j\omega\varepsilon \mathbf{J}_m \psi + \mathbf{J}_e \times \nabla\psi + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla\psi \right\} dv$$
$$+ \oiint_{\partial\Omega} \left[-j\omega\varepsilon (\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')\psi + (\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}) \times \nabla\psi + (\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}') \nabla\psi \right] dS$$

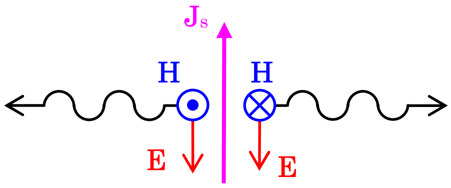


ただし、$\psi(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s) = \dfrac{e^{-jk|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|}$

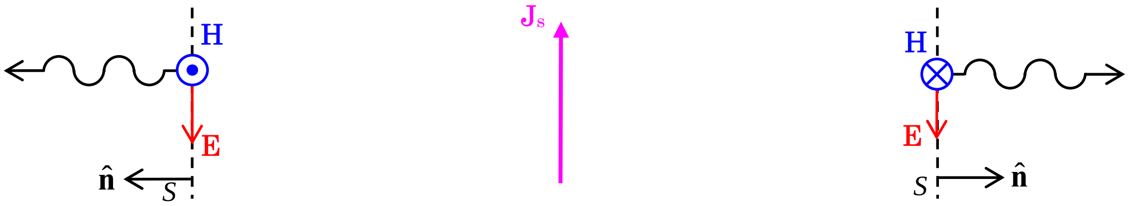
[参考文献]

J.A. Stratton, Electromagnetic Theory, John Wiley & Sons, Inc., 2007.

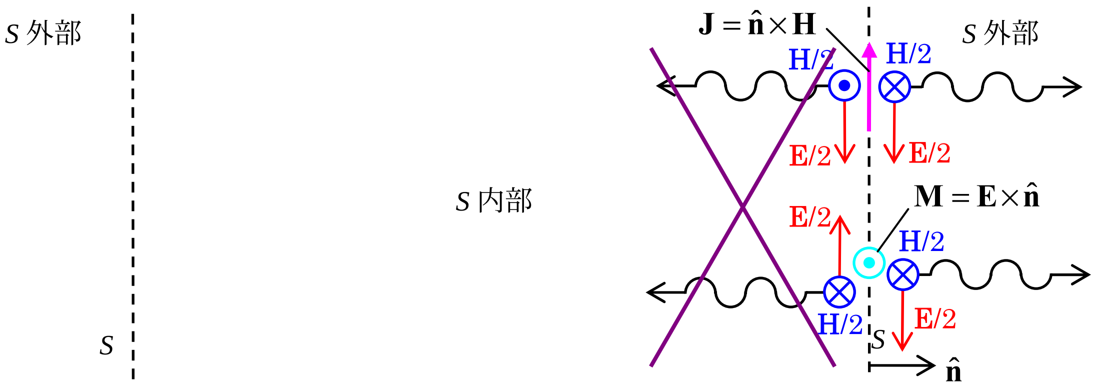
[等価波源の例（1次元平面波）]
面電流$\mathbf{J}_s$から、左右に平面波が放射されているとする（1次元問題）。一様面電流からの平面波の放射の式による導出は付録 A.1 参照。



仮想的な面 S を仮定する。



S 上に等価電磁流を仮定する。右側のみ考える（左側も同様）。

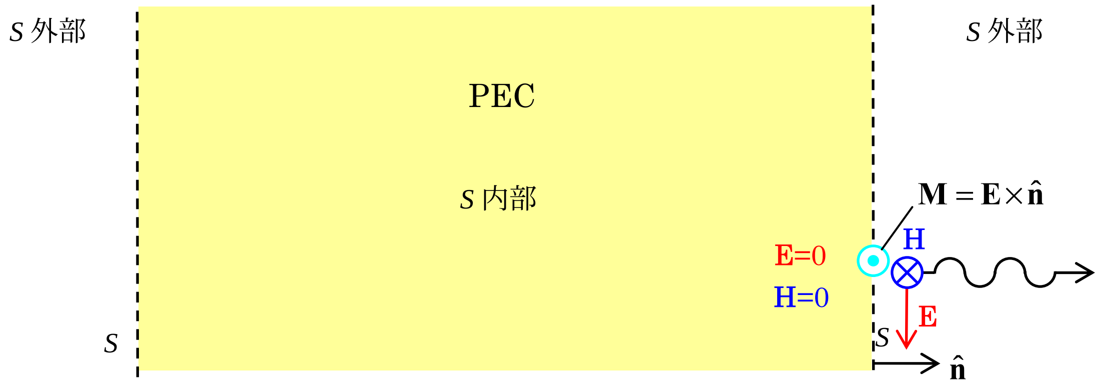


面 S の左側に放射される電磁波は電流$\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}$と磁流$\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}$からの放射を足し合わせると丁度相殺される。つまり、S の外部の電磁界は(S 内の電磁界を考慮しないで)S 上の等価電磁流からの放射によって計算できる。

上のように S 内部の波源を取り除き、S 内部を真空で置き換えて等価波源を S 上に置いて S 外部の界を再現する方法を Love's equivalent (c.f. Love, Phil. Trans., (A) 197, 1901.)と言う。またそのとき、S 内部は 0 フィールドなので（等価電磁流が局所的に内部界を消すので）、どのような物質を置いても結果は変わらないはずである。内部を電気的完全導体(PEC)で満たす Electric conductor equivalent および、内部を磁気的完全導体(PMC)で満たす Magnetic conductor equivalent もある。Electric conductor equivalent では、イメージ理論から電流 **J** は放射しないので外部界は磁流 **M** からの放射のみになる。逆に、Magnetic conductor equivalent では、イメ

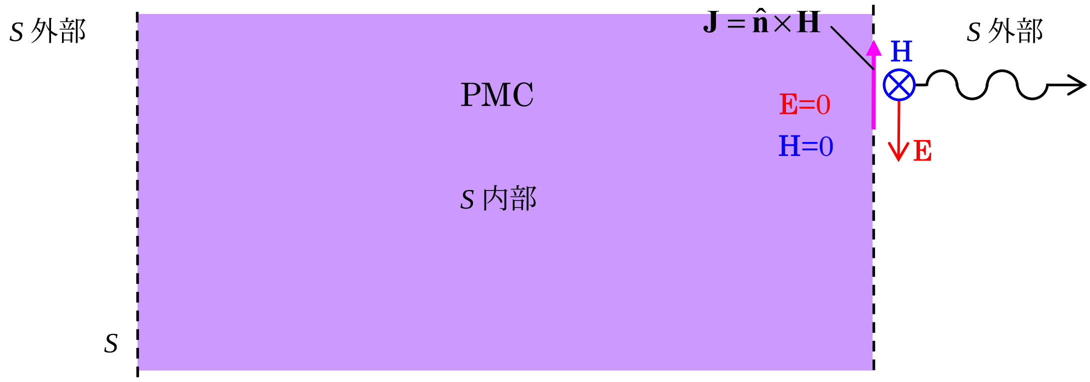
ージ理論から磁流 **M** は放射しないので外部界は電流 **J** からの放射のみになる。

[Electric conductor equivalent]



PEC 上の磁流 **M** で強制的に PEC の境界上で電界の接線成分を作り出す。

[Magnetic conductor equivalent]



PMC 上の電流 **J** で強制的に PMC の境界上で磁界の接線成分を作り出す。

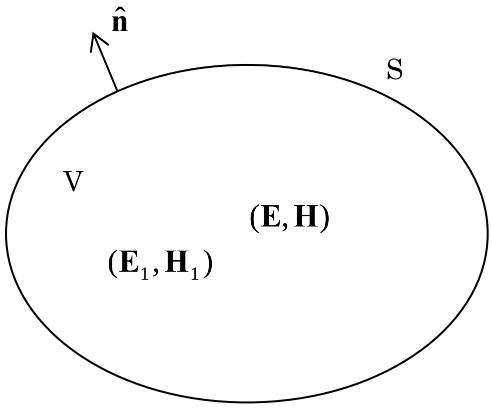
3.3 解の一意性（Uniqueness Theorem）

3.3.1 Poynting Vector を用いる証明

Tokyo Tech OCW (http://www.ocw.titech.ac.jp/)

東京工業大学オープンコースウェア TOKYO TECH OPENCOURSEWARE OCW

の「工学部」→「電気電子工学科」→「波動工学」の講義資料を参照



$$\boxed{\oint\!\!\oint_S (\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\times(\mathbf{H}-\mathbf{H}_1)^* \cdot \hat{\mathbf{n}}dS = -j\omega\iiint_V \left\{|\mathbf{H}-\mathbf{H}_1|^2\mu - |\mathbf{E}-\mathbf{E}_1|^2\varepsilon\right\}dV - \sigma\iiint_V |\mathbf{E}-\mathbf{E}_1|^2 dV}$$

$\sigma \neq 0$ とすると、S 上で $\mathbf{E}\times\hat{n} = \mathbf{E}_1\times\hat{n}$ or $\mathbf{H}\times\hat{n} = \mathbf{H}_1\times\hat{n}$ ならば、
V 内の至る所で $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$ (Real=0) and $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1$ (Imag=0)

なぜならば、
$\{(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\times(\mathbf{H}-\mathbf{H}_1)\}\cdot\hat{n} = \{(\mathbf{H}-\mathbf{H}_1)\times\hat{n}\}\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1) = \{\hat{n}\times(\mathbf{E}-\mathbf{E}_1)\}\cdot(\mathbf{H}-\mathbf{H}_1)$

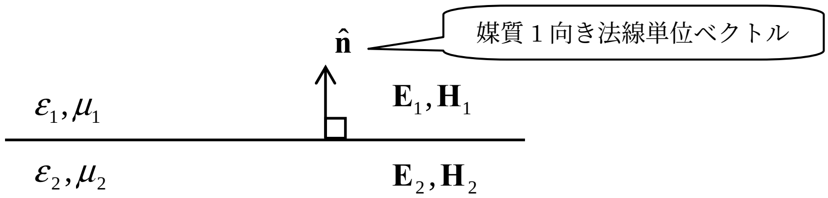
■解の一意性(Uniqueness)の重要性

微分方程式の境界値問題の解は１つしか存在しないという解の一意性の定理は非常に重要である。まず、物理現象として１つの界分布しか許されないということを知ることに興味があり、重要である。また、計算上も非常に重要で、微分方程式を解くときはいくつか非常に粗っぽいとも思える式変形をして解くことがある。それで求まった解は、元の方程式に代入して確かに解であることを確認して納得することができるが、いつも「他の解は存在しなかったのだろうか？」という疑問が残ってしまう。そこで、「解の一意性(Uniqueness)」の定理があれば、たとえ他に方程式の解き方があったとしても、結局最終結果は同じになるのだということがわかって安心することが出来るのである。

上の解の一意性では境界 S 上の至る所で $\mathbf{E}$ の接線成分または $\mathbf{H}$ の接線成分を与えれば S に囲まれた空間 V 内で界が一意に定まるということを言っている。しかし、それは閉空間 V についての条件を言っているのであって、3.2.4 節のように $\Omega+\overline{\Omega}$ の全空間を考えるときには $\mathbf{E}$ の接線成分かつ $\mathbf{H}$ の接線成分の両方を境界 S で与えないと V 内の界を一意に定めることができない。

境界条件 まとめ

マクスウェルの方程式と次のように対応させて$(\partial/\partial t \to 0, \nabla \to \hat{\mathbf{n}})$覚えると覚えやすい。



マクスウェルの方程式		境界条件
$\nabla\times\mathbf{E}+\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$	$\leftrightarrow$	$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{E}_1-\mathbf{E}_2)=0$
$\nabla\times\mathbf{H}+\dfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{j}$	$\leftrightarrow$	$\hat{\mathbf{n}}\times(\mathbf{H}_1-\mathbf{H}_2)=\mathbf{j}_s$
$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$	$\leftrightarrow$	$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{D}_1-\mathbf{D}_2)=\sigma$
$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$	$\leftrightarrow$	$\hat{\mathbf{n}}\cdot(\mathbf{B}_1-\mathbf{B}_2)=0$

同値

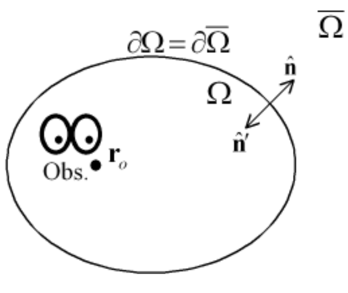
上の境界条件のまとめを見てもわかるように、$\mathbf{E}$ と $\mathbf{H}$ の垂直成分の境界条件はそれらの接線成分の境界条件から導くことができ、独立ではない。

3.3.2 積分表現による説明

3.2.4 では

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)=\iiint_\Omega\left\{-j\omega\mu\mathbf{J}_e\psi-\mathbf{J}_m\times\nabla\psi+\frac{\rho_e}{\varepsilon}\nabla\psi\right\}dv$$
$$+\oiint_{\partial\Omega}\left[-j\omega\mu(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})\psi-(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')\times\nabla\psi+(\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}')\nabla\psi\right]dS$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_o)=\iiint_\Omega\left\{-j\omega\varepsilon\mathbf{J}_m\psi+\mathbf{J}_e\times\nabla\psi+\frac{\rho_m}{\mu}\nabla\psi\right\}dv$$
$$+\oiint_{\partial\Omega}\left[-j\omega\varepsilon(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')\psi+(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})\times\nabla\psi+(\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}')\nabla\psi\right]dS$$



の結果が得られた。$\partial\Omega$ 上では電磁界の法線成分が使われているが、それらは接線成分を用いて表すことも可能である。例えば、$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}'$ を電界または磁界の接線成分のみで表してみよう。$\partial\Omega$ 上には励振電流が無いので、アンペアの法則より、

$$\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}' = \left(\frac{\nabla\times\mathbf{H}}{j\omega\varepsilon}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}' = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\{(\nabla\times\mathbf{H})\cdot\hat{\mathbf{n}}'\} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\{(\nabla\times\mathbf{H}_t)\cdot\hat{\mathbf{n}}'\}$$
$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\{(\nabla\times(-\hat{\mathbf{n}}'\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})))\cdot\hat{\mathbf{n}}'\}$$

同様に、

$$\mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{n}}' = \left(\frac{\nabla\times\mathbf{E}}{-j\omega\mu}\right)\cdot\hat{\mathbf{n}}' = -\frac{1}{j\omega\mu}\{(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\hat{\mathbf{n}}'\} = -\frac{1}{j\omega\mu}\{(\nabla\times\mathbf{E}_t)\cdot\hat{\mathbf{n}}'\}$$
$$= -\frac{1}{j\omega\mu}\{(\nabla\times(-\hat{\mathbf{n}}'\times(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E})))\cdot\hat{\mathbf{n}}'\}$$

このように、$\partial\Omega$ 上では電界および磁界の接線成分のみわかればよい（垂直成分は不要）ことがわかる。

3.4 界等価定理と境界要素法（モーメント法）

3.4.1 金属導体による散乱のモーメント法解析

$$\mathbf{A}=\iiint\frac{\mu_0\mathbf{J}e^{-jkr}}{4\pi r}dv$$

$$\begin{cases}\mathbf{E}=-j\omega\mathbf{A}+\dfrac{\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})}{j\omega\varepsilon_0\mu_0}\\[2mm]\mathbf{H}=\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{A}\end{cases}$$

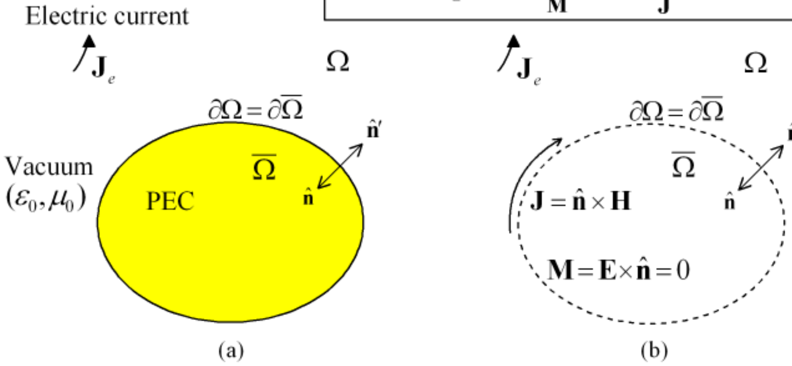
$$\nabla\cdot(V\mathbf{A})=V\nabla\cdot\mathbf{A}+\mathbf{A}\cdot\nabla V$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$\nabla_o\{\nabla_o\cdot(\mathbf{J}\psi)\}=\nabla_o\{\mathbf{J}\cdot\nabla_o\psi\}=[\mathbf{J}\cdot\nabla_o]\nabla_o\psi$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_o)=\iiint_\Omega\left\{-j\omega\mu_0\mathbf{J}_e\psi-\mathbf{J}_m\times\nabla\psi+\frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\nabla\psi\right\}dv+\oint\!\!\oint_{\partial\Omega}\left[-j\omega\mu_0\underbrace{(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})}_{\mathbf{J}}\psi-\underbrace{\cancel{(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')}}_{\mathbf{M}}\times\nabla\psi+\frac{1}{j\omega\varepsilon_0}[\underbrace{(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})}_{\mathbf{J}}\cdot\nabla]\nabla\psi\right]dS$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_o)=\iiint_\Omega\left\{-j\omega\varepsilon_0\mathbf{J}_m\psi+\mathbf{J}_e\times\nabla\psi+\frac{\rho_m}{\mu_0}\nabla\psi\right\}dv+\oint\!\!\oint_{\partial\Omega}\left[-j\omega\varepsilon_0\underbrace{\cancel{(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')}}_{\mathbf{M}}\psi+\underbrace{(\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H})}_{\mathbf{J}}\times\nabla\psi+\frac{1}{j\omega\mu_0}[\underbrace{\cancel{(\mathbf{E}\times\hat{\mathbf{n}}')}}_{\mathbf{M}}\cdot\nabla]\nabla\psi\right]dS$$

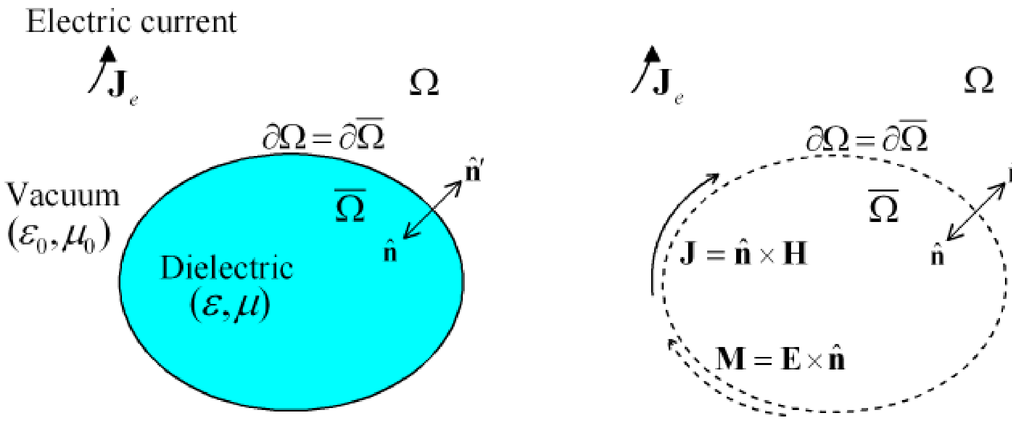


(Step1) 境界 $\partial\Omega$ に未知電流 $\mathbf{J}=\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{H}$ を仮定する。

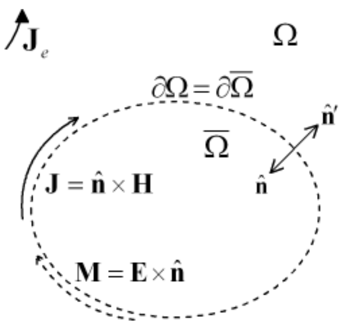
(Step2) 空間 Ω において、Ω 内の波源と境界 $\partial\Omega$ の未知電流が作る電磁界を計算する（特に、$\mathbf{E}$ を計算する）。このとき、空間 $\overline{\Omega}$ は空間 Ω と同じ媒質で満たされているとして電磁界を計算できることが重要である（上の式の表現）。このことの１つの説明として、境界 $\partial\Omega$ 上の等価波源が空間 Ω の波源の電磁界を相殺して空間 $\overline{\Omega}$ 内の電磁界を０にしているため、空間 $\overline{\Omega}$ にどのような媒質を置いても問題ないというものがある。すなわち、空間 $\overline{\Omega}$ は真空にすることもできるが、どのような媒質で満たしてもかまわないのである。式の計算では Ω でヘルムホルツの波動方程式を満たすグリーン関数（空間 $\overline{\Omega}$ 内の媒質は何でもよい）を用いればよいのである。

(Step3) 境界 $\partial\Omega$ において電界が境界条件 $\hat{\mathbf{n}}'\times\mathbf{E}=0$ を満たすように $\mathbf{J}$ を決定する。

3.4.2 誘電体による散乱のモーメント法解析

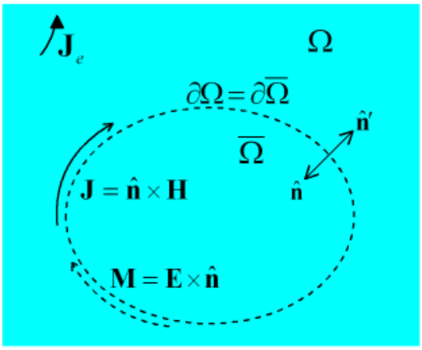


(a) (b)



(a) Ω

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(\Omega)}(\mathbf{r}_o) &= \iiint_{\Omega} \left\{ -j\omega\mu_0 \mathbf{J}_e \psi_0 - \mathbf{J}_m \times \nabla\psi_0 + \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\nabla\psi_0 \right\} dv \\
&+ \oiint_{\partial\Omega} \left[-j\omega\mu_0 \underbrace{(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})}_{\mathbf{J}} \psi_0 - \underbrace{(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}')}_{\mathbf{M}} \times \nabla\psi_0 + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left[\underbrace{(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})}_{\mathbf{J}} \cdot \nabla \right] \nabla\psi_0 \right] dS \\
\mathbf{H}^{(\Omega)}(\mathbf{r}_o) &= \iiint_{\Omega} \left\{ -j\omega\varepsilon_0 \mathbf{J}_m \psi_0 + \mathbf{J}_e \times \nabla\psi_0 + \frac{\rho_m}{\mu_0}\nabla\psi_0 \right\} dv \\
&+ \oiint_{\partial\Omega} \left[-j\omega\varepsilon_0 \underbrace{(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}')}_{\mathbf{M}} \psi_0 + \underbrace{(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})}_{\mathbf{J}} \times \nabla\psi_0 + \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[\underbrace{(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}')}_{\mathbf{M}} \cdot \nabla \right] \nabla\psi_0 \right] dS
\end{aligned}
$$



(b) $\overline{\Omega}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(\overline{\Omega})}(\mathbf{r}_o) &= \iiint_{\overline{\Omega}} \left\{ -j\omega\mu_0 \mathbf{J}_e \psi_0 - \mathbf{J}_m \times \nabla\psi_0 + \frac{\rho_e}{\varepsilon_0}\nabla\psi_0 \right\} dv \\
&+ \oiint_{\partial\overline{\Omega}} \left[-j\omega\mu_0 \underbrace{(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})}_{\mathbf{J}} \psi_0 - \underbrace{(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}')}_{\mathbf{M}} \times \nabla\psi_0 + \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \left[\underbrace{(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})}_{\mathbf{J}} \cdot \nabla \right] \nabla\psi_0 \right] dS \\
\mathbf{H}^{(\overline{\Omega})}(\mathbf{r}_o) &= \iiint_{\overline{\Omega}} \left\{ -j\omega\varepsilon_0 \mathbf{J}_m \psi_0 + \mathbf{J}_e \times \nabla\psi_0 + \frac{\rho_m}{\mu_0}\nabla\psi_0 \right\} dv \\
&+ \oiint_{\partial\overline{\Omega}} \left[-j\omega\varepsilon_0 \underbrace{(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}})}_{\mathbf{M}} \psi_0 + \underbrace{(\hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H})}_{\mathbf{J}} \times \nabla\psi_0 + \frac{1}{j\omega\mu_0} \left[\underbrace{(\mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}')}_{\mathbf{M}} \cdot \nabla \right] \nabla\psi_0 \right] dS
\end{aligned}
$$

(Step1) 境界 $\partial\Omega$ に未知電磁流 $\mathbf{J} = \hat{\mathbf{n}}' \times \mathbf{H}$，$\mathbf{M} = \mathbf{E} \times \hat{\mathbf{n}}'$ を仮定する。

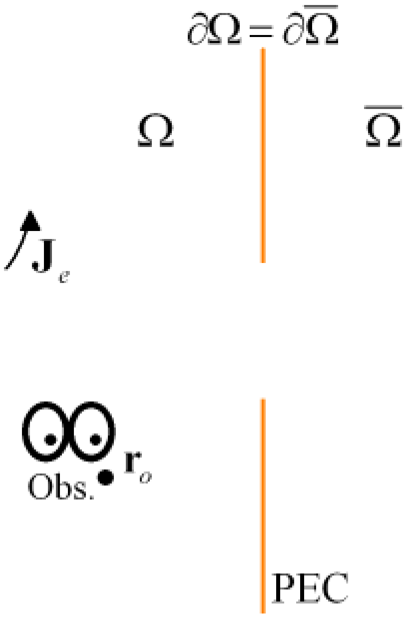
(Step2) 空間 Ω において、Ω 内の波源と境界 $\partial\Omega$ の未知電流が作る電磁界 $\mathbf{E}^{(\Omega)}, \mathbf{H}^{(\Omega)}$ を計算する。

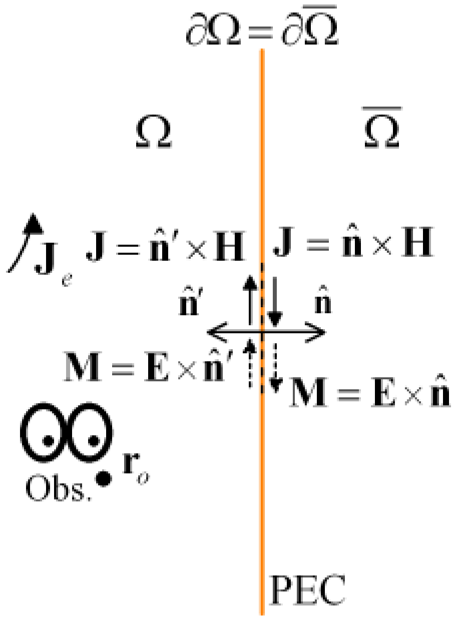
(Step3) 空間 $\overline{\Omega}$ において、$\overline{\Omega}$ 内の波源と境界 $\partial\Omega$ の未知電流が作る電磁界 $\mathbf{E}^{(\overline{\Omega})}, \mathbf{H}^{(\overline{\Omega})}$ を計算する。

(Step4) 境界 $\partial\Omega$ における境界条件 $\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{E}^{(\Omega)} - \mathbf{E}^{(\overline{\Omega})}) = 0$，$\hat{\mathbf{n}}' \times (\mathbf{H}^{(\Omega)} - \mathbf{H}^{(\overline{\Omega})}) = 0$ を満たすように

境界 $\partial\Omega$ の未知電磁流を決定する。

3.4.3 無限導体板中の穴による散乱





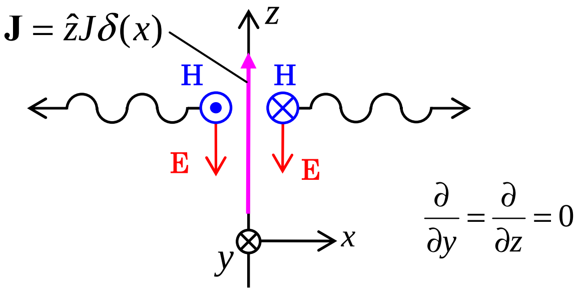
左の図のような無限導体板中に開いた穴による散乱問題を考える。
この問題は 3.4.1, 3.4.2 節とは違って、右の図のように PEC で穴を塞いだ問題を考えた方が解くのが楽になる。PEC で穴を塞いだ問題に置き換えたということは、その構造であることを反映するためにグリーン関数はその構造の境界条件を満たすものを用いなければならない（後で述べるように、その構造の境界条件を考慮したグリーン関数を用いなければ開口だけに磁流 $\mathbf{M}$ を置けばよいという仮定が崩れる）。

PEC 上に平行に置かれた電流源は放射しない（イメージ理論より）ので、$\mathbf{J} = 0$ となり、境界には磁流のみ考慮する。

この磁流は金属で蓋をされた開口上に磁界を作り出し、左右の境界で磁界の接線成分が等しくなるように磁流 $\mathbf{M}$ が決定される。

A. 付録

A.1 一様面電流からの平面波の放射（1次元問題）



まず、ベクトルポテンシャルを計算する。$\mathbf{A}=\iiint_V \frac{\mu \mathbf{J}e^{-jkr}}{4\pi r}dv_s$ で計算したくなるかもしれないが、問題によっては微分方程式（ヘルムホルツの方程式）$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}$ から計算した方が楽であり、この問題もその一例である。

$$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+k^2A_z=-\mu J\delta(x)$$

斉次解

斉次方程式: $\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+k^2A_z=0$

$A_z=e^{\lambda x}$ と仮定して代入すると、

$$\left(\lambda^2+k^2\right)e^{\lambda x}=0$$

$$\therefore \quad \lambda=\pm jk$$

斉次解: $A_z=Ae^{jkx}+Be^{-jkx}$

$x=0$ にしか波源が無いので、

$$A_z=\begin{cases} Ae^{jkx} & (x<0) \\ Be^{-jkx} & (x>0) \end{cases}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}$$

$$=\frac{1}{\mu}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}=-\hat{y}\frac{1}{\mu}\frac{\partial A_z}{\partial x}=\begin{cases} -\hat{y}A\frac{jk}{\mu}e^{jkx} & (x<0) \\ \hat{y}B\frac{jk}{\mu}e^{-jkx} & (x>0) \end{cases}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon}\nabla\times\mathbf{H}$$

$$= \frac{1}{j\omega\varepsilon}\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{z}\frac{1}{j\omega\varepsilon}\frac{\partial H_y}{\partial x} = \begin{cases} \hat{z}A\dfrac{k^2}{j\omega\varepsilon\mu}e^{jkx} & (x<0) \\ \hat{z}B\dfrac{k^2}{j\omega\varepsilon\mu}e^{-jkx} & (x>0) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\hat{z}Aj\omega e^{jkx} & (x<0) \\ -\hat{z}Bj\omega e^{-jkx} & (x>0) \end{cases}$$

$x=0$ での $\mathbf{E},\mathbf{H}$ の接線成分の境界条件から A,B を決定する。

$$\begin{cases} \hat{x}\times(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) = 0 \\ \hat{x}\times(\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \hat{z}J \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{y}j\omega(B-A) = 0 \\ \hat{z}\dfrac{jk}{\mu}(B+A) = \hat{z}J \end{cases} \Rightarrow \ A = B = -j\frac{\mu J}{2k}$$

従って、

$$\mathbf{E} = \begin{cases} -\hat{z}\eta\dfrac{J}{2}e^{jkx} & (x<0) \\ -\hat{z}\eta\dfrac{J}{2}e^{-jkx} & (x>0) \end{cases} ;\ \mathbf{H} = \begin{cases} -\hat{y}\dfrac{J}{2}e^{jkx} & (x<0) \\ \hat{y}\dfrac{J}{2}e^{-jkx} & (x>0) \end{cases}$$