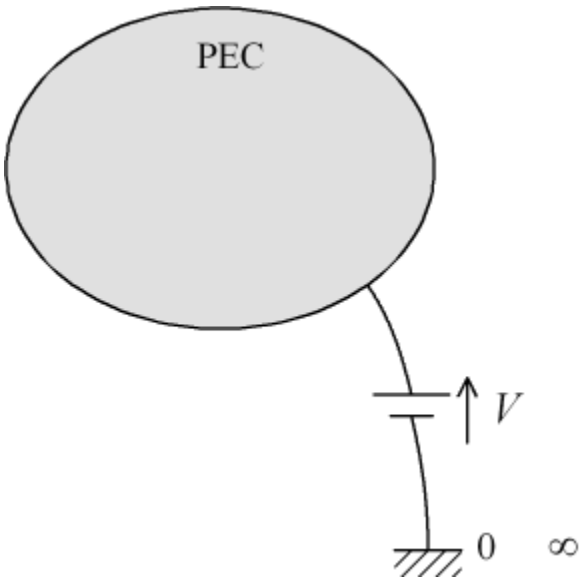
界等価定理とモーメント法

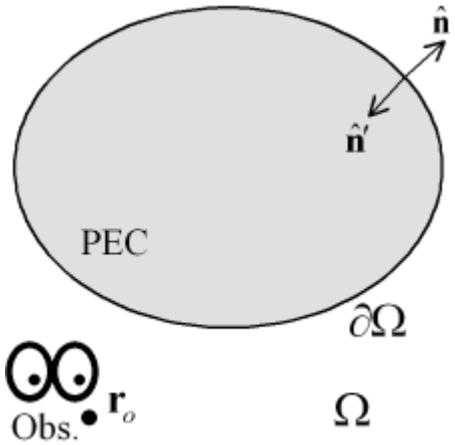
2006/06/07 平野拓一（東京工業大学）

1. 導体表面の電荷分布を求める問題



上の図のように、無限遠に対して導体(PEC)を電位 V に保つとする。すると、導体の表面には電荷が表れ、その表面電荷は導体内および導体表面の電位を一定に保つように分布する。この電荷分布を求める問題を考えよう。

2. グリーン関数を用いたポテンシャルの表現



(i)

PEC 内部での式（観測点も内部）

$$\phi(\mathbf{r}_o) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dv_s + \underbrace{\oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n} \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} dS_s}_{\text{電気一重層}} - \underbrace{\oiint_{\partial\Omega} \phi(\mathbf{r}_s) \frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n} dS_s}_{\text{電気二重層}}$$

この式で観測点が外の場合、$\phi(\mathbf{r}_o)=0$ となる（$\nabla^2 G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)=-\delta(\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s)$ の性質から）。また、PEC 内なので、$\rho=\dfrac{\partial\phi}{\partial n}=0$。

$$0=\underbrace{-\oiint_{\partial\Omega}\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n}dS_s}_{\text{電気二重層}}$$

(ii)
外部での式（観測点も外部）

$$\phi(\mathbf{r}_o)=\iiint_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dv_s+\underbrace{\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n'}\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dS_s}_{\text{電気一重層}}-\underbrace{\oiint_{\partial\Omega}\phi(\mathbf{r}_s)\frac{\partial G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)}{\partial n'}dS_s}_{\text{電気二重層}}$$

(i) より、

$$=\iiint_{\Omega}\frac{\rho(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dv_s+\underbrace{\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n'}\frac{1}{4\pi|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dS_s}_{\text{電気一重層}}$$

3. 積分方程式の導出

2 節の(ii)より、観測点 $\mathbf{r}_o$ が PEC 表面 $\partial\Omega$ 上にあるとき、

$$V=\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial\phi(\mathbf{r}_s)}{\partial n'}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dS_s$$

が導出された。$\dfrac{\partial\phi}{\partial n'}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ の関係を用いると

$$V=\oiint_{\partial\Omega}\frac{\sigma(\mathbf{r}_s)}{\varepsilon_0}G(\mathbf{r}_o;\mathbf{r}_s)dS_s$$

$$\oiint_{\partial\Omega}\frac{\sigma(\mathbf{r}_s)}{4\pi\varepsilon_0|\mathbf{r}_o-\mathbf{r}_s|}dS_s=V$$

となり、**被積分関数(integrand)**に未知数 σ (表面電荷密度)がある方程式が得られた。被積分関数に求めたい未知数があるのでこれは**積分方程式(integral equation)**である。この積分方程式は数学の積分方程式論では **Fredholm の第一種積分方程式**に分類される(寺沢寛一著、「自然科学者のための 数学概論」、岩波書店、p.565)。任意の形をした境界に対する境界値問題を解く場合にも、自由空間のグリーン関数さえ分かっていればよいところがすごい！（グリーンの偉大なアイデアである）
この積分方程式の解法は次のドキュメントで説明する。