

モーメント法(Method of Moments, Moment Method)入門

2004.5 平野拓一(東京工業大学)

モーメント法(Method of Moments, Moment Method)とは R. F. Harrington (1967) [1] によって命名された電磁界解析手法の一つである。金属で出来たアンテナの解析や金属による散乱問題を得意とし、電磁界の界等価定理により境界上に仮定した未知電磁流を求める問題となる。すなわち、未知数は境界上に置かれるのが特徴である。

いろいろな問題の解析ができるが、まず始めにモーメント法とはどういうものを勉強しやすいように導体棒上の電荷分布を求める問題を例にして説明していく。

1. 細い導体棒上の電荷分布

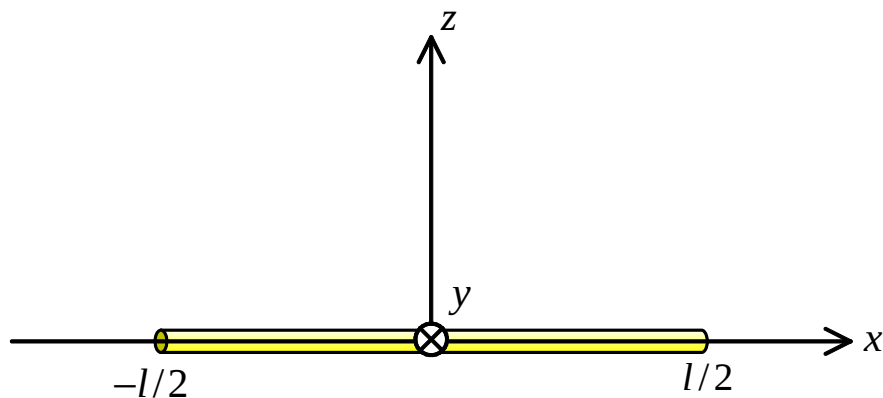


図 1 x 軸上に置かれた細い導体棒

図 1 に示すように x 軸上に沿った無限に細い導体棒がある。

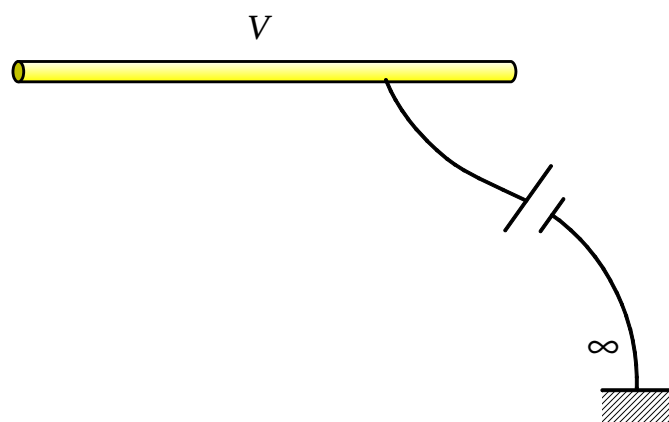


図 2 電圧をかけた導体棒

図 1 の導体棒に図 2 に示すように電圧（無限遠に対する電位） V をかける。すると、導体棒上には電荷が供給され、導体棒上の電位が等しくなるように電荷が分布する（静電界の場合、同一導体上の電位はどこでも一定である。なぜならば、同一導体上で電位差がある場合、その電位差によって電荷、つまり自由電子が流れ電位差が 0 になるまで流れ続けるからである）。このとき、導体棒上でどのように電荷が分布しているかはわからない。

そこで、これから「導体棒上の電荷分布を求めよ」という問題を考え、それを解く方法について説明する。

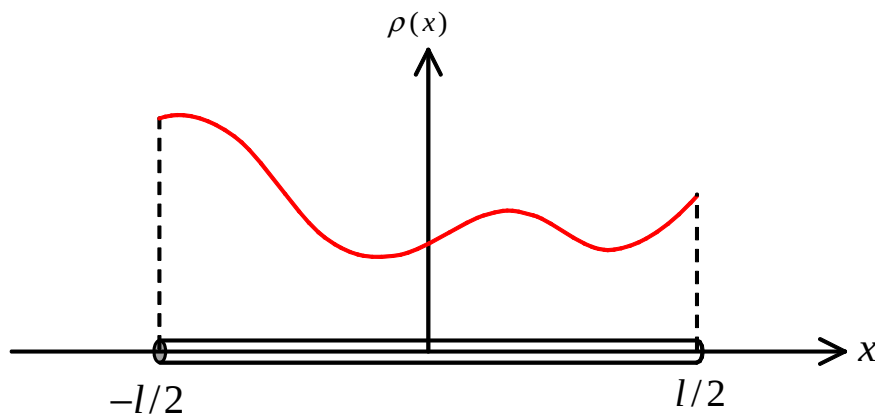


図 3 未知電荷分布

まず、図 3 に示すように、電圧 V を与えて、導体棒上に線電荷密度 $\rho(x)$ （まだ未知の関数形であるが）の分布になったとする。

その電荷分布による空間内の任意の点 $\mathbf{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ の電位 $\phi(\mathbf{r}_o)$ は電荷の重ね合わせの定理より、次のように書ける。

$$\phi(\mathbf{r}_o) = \int_{\text{on bar}} \rho(\mathbf{r}_s) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} d\ell_s \quad (1)$$

ただし、 $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$ は波源点を表し、 $d\ell_s$ は微小線素の長さを表す。

境界条件の適用（→解くべき方程式の作成）

次に、図 2 のように電圧をかけた時は導体棒上では至る所で電位は V となることを考えると、式 (1) の観測点 $\mathbf{r}_o$ を導体棒上に持っていくと、次の方程式が得られる。

$$\int_{\text{on bar}} \rho(\mathbf{r}_s) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} d\ell_s = V \quad (\mathbf{r}_o \text{ は導体棒上}) \quad (2)$$

ここで、式 (2) は未知数 ρ が被積分関数となっているので、**積分方程式(Integral equation)**である。

未知数の離散化（→積分方程式を行列方程式へ）

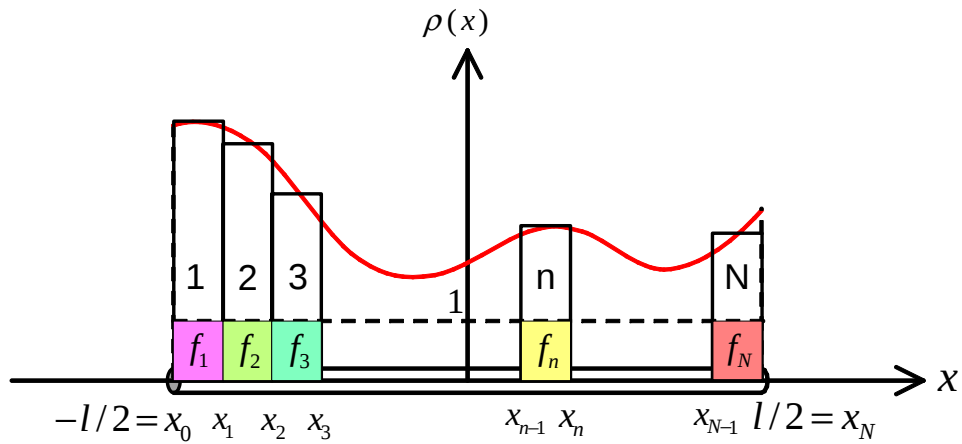


図 4 パルス関数展開

ここで、未知関数 $\rho(x)$ を次のように展開する。

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^N a_n f_n(x) \quad (3)$$

ここで、

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & (x_{n-1} < x < x_n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

であり、式(3)、式(4)は図 4 のように未知関数を展開することに相当する。式(4)のような基底関数をパルス関数(Pulse function)と言い、幅が 0.1 のときの場合を図 5 に示す。

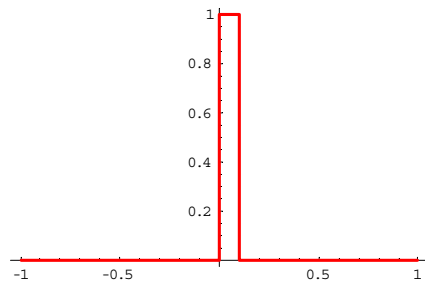


図 5 パルス関数

このように、解析領域の一部の場所に局在して置く基底関数を**局所基底関数(Local domain basis function)**と言う。そして、各基底関数が置かれている分割された領域を**セグメント(Segment)**と言う。それに対して、フーリエ級数のように解析領域全体に置く基底関数を**全域基底関数(Entire domain basis function)**と言う。式(3)を式(2)に代入すると

$$\int_{\text{on bar}} \sum_{n=1}^N a_n f_n(x_s) \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} d\ell_s = V$$

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_{\text{on bar}} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_o - \mathbf{r}_s|} d\ell_s = V$$

$$\sum_{n=1}^N a_n \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s = V \quad (5)$$

ここで、式(5)の $f_n(x)$ はその積分区間内では 1 なので $f_n(x)=1$ としてしまってもいいのだが、後の説明のためにしばらくこの表現で留めておく。

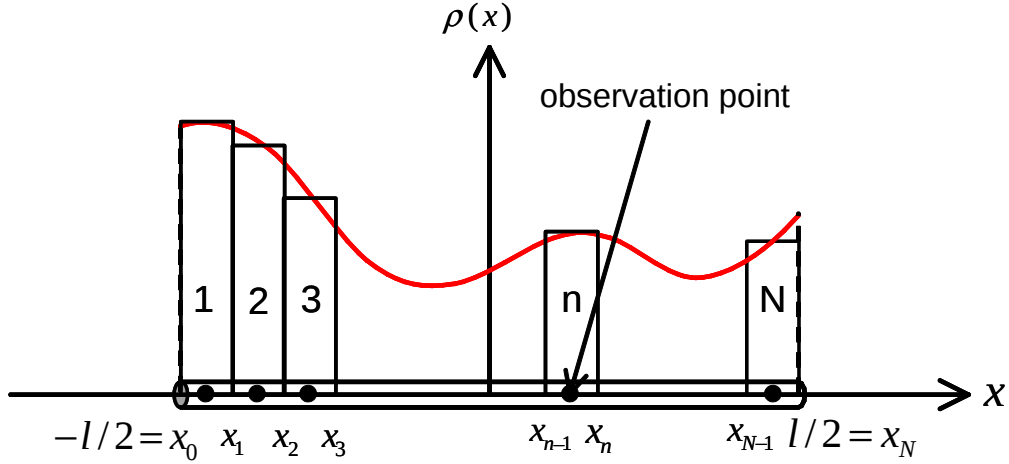


図 6 点での観測 (ポイントマッチング)

ここで、観測点 x_o を基底関数 n の中心位置 $x_o^n = \frac{x_{n-1} + x_n}{2}$ として、図 6 のように N 個の基底関数の中心位置について観測すると式(5)より、独立な N 個の方程式が得られる。

$$\begin{aligned} [\text{Obs.}\#1] \quad & \sum_{n=1}^N a_n \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x_o^1 - x_s|} dx_s = V \\ & \vdots \\ [\text{Obs.}\#N] \quad & \sum_{n=1}^N a_n \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x_o^N - x_s|} dx_s = V \end{aligned} \quad (6)$$

未知数 N 個で、式が N 個だから、これらの連立一次方程式は解ける。ここでは点で観測したので、このように式(5)を離散化する方法を点整合法(Point matching method, ポイントマッチング法)または選点法(Collocation method)と言う。

これは行列形式で表現することが出来て、

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & \cdots & z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ \vdots \\ V \end{bmatrix} \quad (7)$$

となる。ただし、

$$z_{mn} = \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |x_o^m - x_s|} dx_s \quad (8)$$

である。式(7)は行列方程式であり、これを解けば $a_1, \dots, a_N$ が求まり、式(3)から未知であった電荷分布が求まることになる。

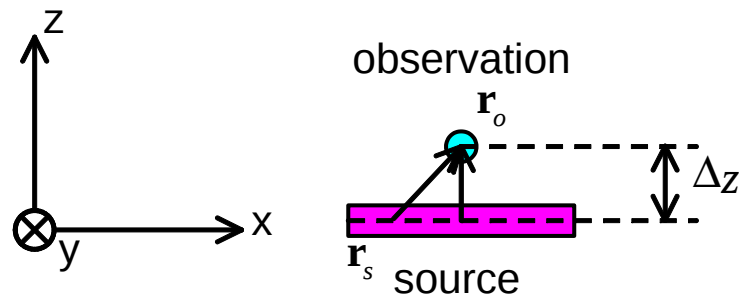


図 7 特異点の回避

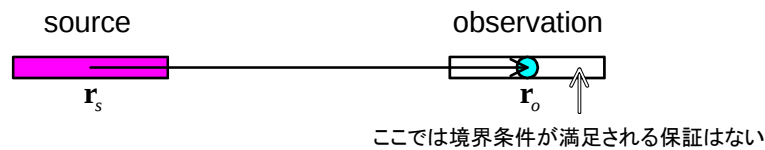
数値計算上注意することは、式(8)で $m = n$ のときには被積分数の分母が0となる特異点がある。そのため、そのときに限って図 1 の y または z 方向に少しだけ観測点をずらして(図 7)計算することがよく行われる(漸近表現を使って解析的に評価する方法もある)。そして、その場合には式(8)の代わりに次の式を用いて評価すればよい。

$$z_{mm} = \int_{x_s=x_{m-1}}^{x_m} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{(x_o^m - x_s)^2 + \Delta z^2}} dx_s$$

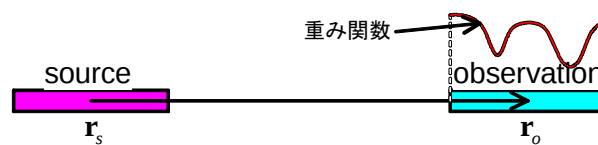
波源の電荷は導体棒の中心に配置するのが望ましい。実際には太さがある導体棒では電荷は表面に軸対称に分布するが、その電荷分布によるフィールドは中心に線電荷を配置したフィールドと同じになるからである。また、重み付けする観測点は導体表面上に配置するようにする。なぜならば、境界条件が満たされるのは導体表面だからである。

さて、これで一応問題は解けたことになるが、少し我慢して次の話を聞いて欲しい。

重み付け残差法 (→境界条件を区間に対して適用するために)



(a) 重み付けしない場合



(b) 重み付けする場合

図 8 重み付け

式(7)は、図 6 のように観測点を配置して方程式を作ったものであり、図 8(a)に示すように、点

以外の場所では式(2)が満たすことは保証されていない。しかし、実際には図 6 の観測点と観測点の間も導体棒なので、式(2)は満足されなければならない。そこで、図 8(b)に示すように観測点のある基底関数区間でも重み関数をかけて積分し、その区間内で式(2)は平均の意味で保証されるように式を導く。つまり、重みが大きい所では重みが小さい所よりも式(2)が満たされることが強く要求されるような条件式となる。

まず、観測区間でのどのような重みで式(2)を評価するかを決める**重み関数(Weighting function)**または**試験関数(Trial function)**と呼ばれる次のような関数を定義する。

$$w_n(x) = \begin{cases} \text{任意の関数形} & (x_{n-1} < x < x_n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (9)$$

式(6)を作るときに観測点を図 6 のように取って式(5)を離散化したが、ここではその代わりに式(9)の N 個の重み関数を式(5)に掛けて、重み関数の定義区間で積分することによって式(5)を離散化する。これを**重み付け残差法(Weighted residual method)**と言う。また、**モーメント法(Method of Moments, Moment Method)**という言葉はこの重み付けする過程から来ている。まだ重み付けの意味がわかりにくいという方は付録 A.1 を参照されたい。

重み付けを行うと式(6)に対応して次の連立方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n \int_{x_0=x_0}^{x_1} w_1(x_o) \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o &= \int_{x_0=x_0}^{x_1} w_1(x_o) V dx_o \\ &\vdots \\ \sum_{n=1}^N a_n \int_{x_0=x_{N-1}}^{x_N} w_N(x_o) \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o &= \int_{x_0=x_0}^{x_1} w_N(x_o) V dx_o \end{aligned} \quad (10)$$

これは行列形式で表現することが出来て、

$$\begin{bmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_{N1} & \cdots & z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \quad (11)$$

となる。ただし、

$$z_{mn} = \int_{x_0=x_{m-1}}^{x_m} w_m(x_o) \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o \quad (12)$$

$$v_m = \int_{x_0=x_{m-1}}^{x_m} w_m(x_o) V dx_o \quad (13)$$

である。

式(12)において、

$$w_m(x_o) = \delta(x_o - x_o^m)$$

とすると、式(12)は

$$\begin{aligned}
 z_{mn} &= \int_{x_o=x_{m-1}}^{x_m} \delta(x_o - x_o^m) \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o \\
 &= \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o^m - x_s|} dx_s
 \end{aligned}$$

となり、式(8)のポイントマッチングに一致する。ただし、 δ は**デルタ関数(Dirac's delta)**である。ポイントマッチングでも分割数を多くしたら境界条件も導体棒のほとんどの場所で満足されることになるが、それには計算時間がかかるため、積分することを考慮しても重み付け残差法を使う価値がある。

また、式(12)の w_m はどんな関数でもいいのだが、普通は式(4)の未知関数の展開関数 f_m と同じ関数を用いる。

$$w_m = f_m$$

その方法を**ガラーキン法(Galerkin's method)**と言う。ガラーキン法を使うと、式(11)の行列が対称行列となる(電磁界の**可逆定理**による)。なぜならば式(12)より、

$$\begin{aligned}
 z_{mn} &= \int_{x_o=x_{m-1}}^{x_m} f_m(x_o) \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o \\
 &= \int_{x_o=x_{m-1}}^{x_m} \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_m(x_o) f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o \\
 z_{nm} &= \int_{x_o=x_{n-1}}^{x_n} f_n(x_o) \int_{x_s=x_{m-1}}^{x_m} \frac{f_m(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o \\
 &= \int_{x_o=x_{n-1}}^{x_n} \int_{x_s=x_{m-1}}^{x_m} \frac{f_n(x_o) f_m(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o \\
 &= \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \int_{x_o=x_{m-1}}^{x_m} \frac{f_n(x_s) f_m(x_o)}{4\pi\epsilon_0 |x_s - x_o|} dx_o dx_s \\
 &= \int_{x_o=x_{m-1}}^{x_m} \int_{x_s=x_{n-1}}^{x_n} \frac{f_m(x_o) f_n(x_s)}{4\pi\epsilon_0 |x_o - x_s|} dx_s dx_o
 \end{aligned}$$

対称行列ならば行列要素の計算時間が半分となるし、専用の数値計算サブルーチンを使えば速く解くことができる(Netlib, <http://www.netlib.org> などで入手可能)。また、少し難しい話になるが、例えば静電容量や他のパラメータに対する**変分表現(Variational expression)**となり、得られた電荷分布が少々実際のもので違ってもそれらの他の物理量が良い精度(2次の精度)で求まることが保証されている。「ガラーキン法は変分法(Variational method)と等価になる」ということもガラーキン法を使うことのメリットである。

このように、重み関数に基底関数と同じ関数を使うと多くのメリットがあるので、普通ガラーキン法が用いられる。

問題

式(7)、式(8)の点整合法の式を使って細い導体棒上の電荷分布を計算せよ。

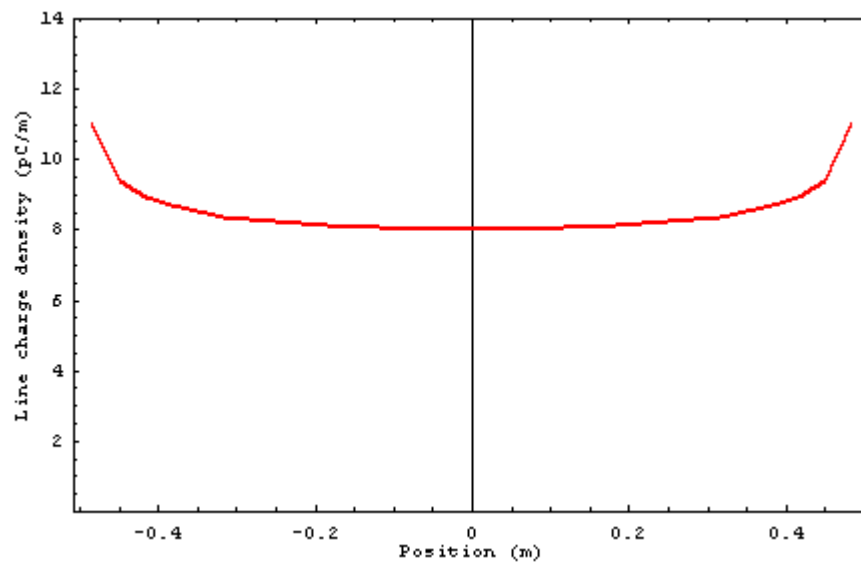
ただし、 $V = 1V, l = 1m$ とする。また、波源と観測点の軸の距離は $0.001m$ とする。分割数 N は各自適当に収束する値に設定せよ。

[ヒント]

- 数値積分は別の演習で作ったシンプソンの公式のプログラムを使うと良い。
- 式(7)の行列方程式の計算には**ガウスの消去法**を用いると良い。Fortran の行列計算のサブルーチンはいろいろなところで手に入る。

解答例

$N = 30$ のとき



両端では大きな値となる。

基底関数について

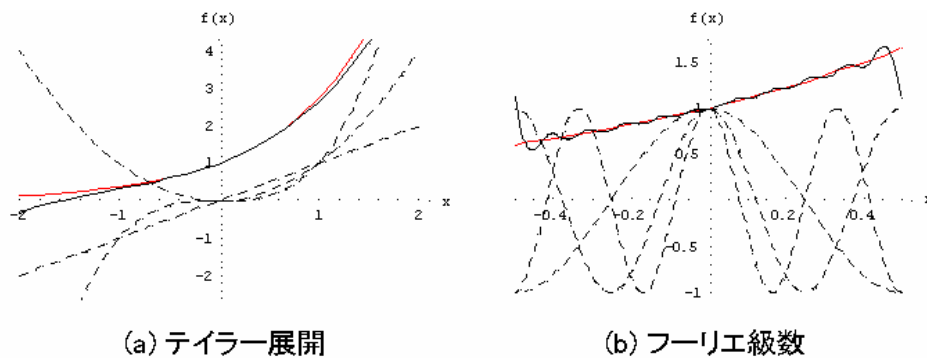


図 9 様々な全域基底関数

図 9 に全域基底関数の例として、テイラー展開とフーリエ級数を示す。他にも最近話題のウェーブレット変換に使われる基底関数など、いろいろな基底関数が存在する。

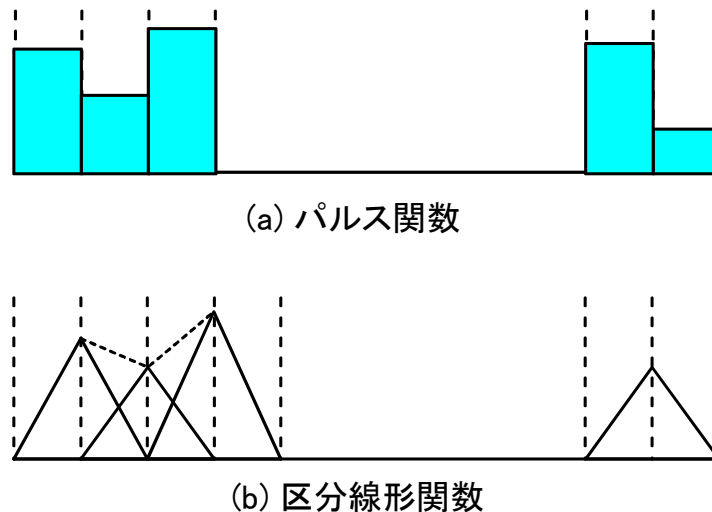


図 10 様々な局所基底関数

上記説明したモーメント法では図 4 に示すような局所基底関数を用いた。図 10 に示すように局所関数にもいろいろなものが存在する。図 10(b)は隣同士のセグメントでオーバーラップさせ、角セグメント内では線形関数で表した区分線形関数(piecewise linear function)である。この関数は電流を扱う問題では端で 0 となっているから蓄積電荷がなく、数式の処理が簡易になるし、間の部分で上手く補間されるのでよく使われる。

また、全域基底関数と局所基底関数を組み合わせて使うことも可能である。全域基底関数を用いる場合、複雑な構造を解析するときは基底関数を求めるだけで大変である。また、実際の分布を表すことができるような基底関数を用意する必要があり、物理的性質がよくわかっていなければならない。従って、どんな構造にも対応できるような汎用プログラムを作るときは、局所基底関数を用いるのがよい。

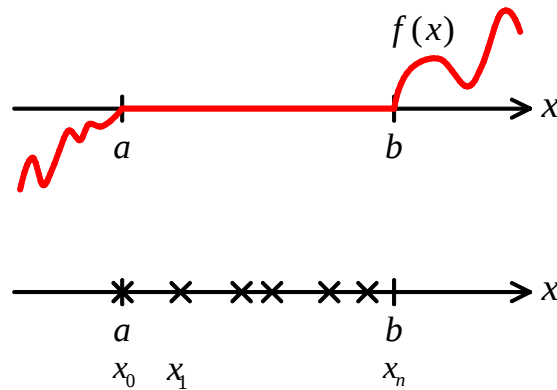
まとめ

モーメント法を用いて今何をしたかという、構造物の境界に未知数を配置し、積分方程式を数値的に解いたわけである。しかし、この定式化の過程を見てもわかるように、解けるのは積分方程式だけではなく、代数方程式、微分方程式、積分方程式などを含む一般の**線形方程式**ならばこの手法で数値的に解けるのである（ただし、数値計算などを駆使してでも、うまく行列表現を導出できることが条件であり、より複雑な構造の解析はこの手法は現実的ではない。そこで、有限要素法や FDTD 法などの他の電磁界解析手法も用いられる）。このことは R.F. Harrington の文献[1]に詳しく書かれている。

ところで、電磁界解析、特にアンテナの分野ではよくモーメント法という言葉が用いられるが、そのときには今のように構造物の境界に未知数を配置して数値的に積分方程式を解く手法を意味している。しかし、この手法は線形方程式を解く手法であり、電磁界解析に関わらず、機械、建築、土木など多くの問題に用いることができる。特に、数値解析の分野ではモーメント法という言葉が使われることはなく、これを指すための用語として**境界要素法(Boundary Element Method, BEM)**という言葉が使われる。モーメント法という言葉はアンテナの分野で限られて使われる用語であり、数値計算の専門家と会話するときに通じなかったら境界要素法と言えは通じる。

A. 付録

A.1 重み付け、モーメント

図 11 区間 $[a, b]$

$f(x)=0$ が図 11 上のように区間 $[a, b]$ で定義されている。 $f(x)=0$ を区間 $[a, b]$ 全域で満たすようにしたい場合、その条件を書くとすれば例えば図 11 下を示されるような離散的な点で $f(x)=0$ を満足するような条件を書く。

$$\begin{cases} f(x_0)=0 \\ f(x_2)=0 \\ \vdots \\ f(x_n)=0 \end{cases} \quad (1)$$

$f(x_i)$ ($i=1, \dots, n$)は正かも知れないし負かもしれないが、 $\{f(x_i)\}^2$ は絶対に正数なので、式(1)の条件式群をまとめて次のように書くことができる。

$$\sum_{i=0}^n \{f(x_i)\}^2 = 0 \quad (2)$$

しかし、式(2)もまだ離散的な点でしか $f(x)=0$ の条件を満足しないので、全区間で満たすようにするには、次のように離散点の間隔を無限に小さくする。

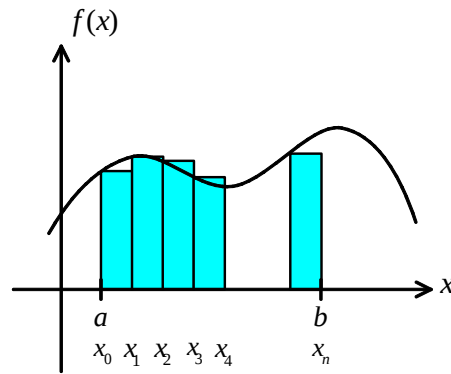


図 12 区分求積

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=0}^n \Delta x \{f(x_i)\}^2 = 0$$

これは区分求積（リーマン積分の定義）であり、次のように表現される。

$$\int_a^b \{f(x)\}^2 dx = 0 \quad (3)$$

$f(x)$ が式(3)を満たすとき、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ 内の至る所で $f(x) = 0$ であり、目的の条件と等価になる。ここで、式(3)は次のモーメントの定義

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 \quad (4)$$

の特殊な場合である。 $g(x)$ を重み関数と言う。

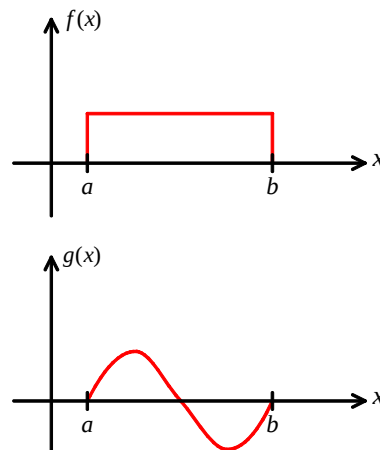


図 13 モーメント

式(4)の表現では図 13 に示されるように $g(x)$ の形によっては「区間 $[a, b]$ 内で $f(x) = 0$ 」が満たされるとは限らない。しかし、 $g(x) = f(x)$ と選び、式(3)の表現にすると式(3)を満たすことと「区間 $[a, b]$ 内で $f(x) = 0$ 」となることは等価となる。 $g(x) = f(x)$ と選ぶ重み付けの方法は**ガラ**

ーキン法(Galerkin's method)と呼ばれ、数値的に安定した解を与える。モーメント法(MoM, Method of Moments, Moment Method)や有限要素法(Finite Element Method)でよく使われる手法である。

[参考文献]

- [1] R. F. Harrington: "Field Computation by Moment Methods", IEEE Press, New York, 1993