平均律と純正律の和音の比較

および協和音・不協和音の考察

2003/3/26 平野拓一（東京工業大学）

1. はじめに

平均律は転調などに全て対応できる使いやすい音律で、現在の音楽の主流である。しかし、純正律に比べると和音が濁ってしまうという欠点がある。これから平均律(temperament)と純正律(just intonation)の和音の響きはなぜ違うのか検討する。

2. 平均律と純正律の違い

2.1 平均律

西洋音楽を初めとして現在世界の主流の音律である。特に、現在ではピアノはほとんど平均律で調律される。

オクターブ o の C(ド)の周波数を f_C^o としたとき、それより１オクターブ上の C の周波数は $f_C^{o+1} = 2 f_C^o$ となる（心理学の「ウェーバー・フェヒナ(Weber-Fechner)の法則」を認めれば納得することである）。そして、平均律では１オクターブ内の 12 個の音(C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B)の周波数を等比数列になるように配分する（詳しくは「音階について」のドキュメントを参照）。ある音から次の音の周波数を求めるための等比数列の公比は $2^{1/12}$ である。どの音を基準音にしても自己相似な周波数の関係が保持されるため転調しても音全体の高さが変わるだけで、相対的な音の高さ関係は同じだからメロディーは同じ感じになり、矛盾を生じない。一見これですべて解決しているように思えるが、音楽の歴史から言うと次節で述べる純正律が先に発明されており、平均律は妥協の産物だったようである。もう少し説明すると最初は**ピュタゴラス律**（数学者で有名）が発明され、次に**純正律**、そして純正律を修正した**不等分平均律**（あるいは**ヴォールテンペリーレン**）と総称される**アロン律 (ミーントーン、中全音律)** 、**キルンベルガー律**、**ヴェルクマイスター律**、**ヴァロッティ・ヤング律**などが多くの音律が登場した。最後にどんな転調にも対応できる**平均律**がでてきて、その便利さ故に世界の主流になったようである。

2.2 純正律

表 1 平均律と純正律の音階の規格化周波数倍率表

		平均律		純正律		比
番号	音名	(1)	(1)の近似値	(2)	(2)の近似値	(2)/(1) 近似値
1	C	$\left(2^{1/12}\right)^0$	1	1	1	1
2	C#	$\left(2^{1/12}\right)^1$	1.059	16/15	1.067	1.0068
3	D	$\left(2^{1/12}\right)^2$	1.122	9/8	1.125	1.00226
4	D#	$\left(2^{1/12}\right)^3$	1.189	13/11* (6/5)	1.182	0.993787
5	E	$\left(2^{1/12}\right)^4$	1.260	5/4	1.25	0.992126
6	F	$\left(2^{1/12}\right)^5$	1.335	4/3	1.333	0.998871
7	F#	$\left(2^{1/12}\right)^6$	1.414	7/5* (45/32)	1.4	0.989949
8	G	$\left(2^{1/12}\right)^7$	1.498	3/2	1.5	1.00113
9	G#	$\left(2^{1/12}\right)^8$	1.587	8/5	1.6	1.00794
10	A	$\left(2^{1/12}\right)^9$	1.682	5/3	1.667	0.991006
11	A#	$\left(2^{1/12}\right)^{10}$	1.782	16/9	1.778	0.997744
12	B	$\left(2^{1/12}\right)^{11}$	1.888	15/8	1.875	0.993247
13	C	$\left(2^{1/12}\right)^{12}$	2	2	2	2

* これらの比は音楽の理論に載っているものとは違います。ここで求めた求め方は「音階・音律について」のホームページの「純正律の説明と Mathematica による純正律の分割比の計算法」の方法のように 1 から 16 までの整数を分母、分子にして平均律に一番近い数を力技で求めたからです。実際は括弧内の分数で、ハーモニクス（フラジョレット）を利用して完全 5 度と長 3 度の分数の掛け算を繰り返して行うようです。しかし、そもそも純正律では全音階の音階しか扱うことを考えておらず、昔から#や♭がついた音など扱おうとしていなかったようです。だから上の表で#や♭が付いたところを訂正してはありますが、まだ正確ではありません（と言うか、しっかりした理論がありませんでした）。しかし、最近はそれを**完全純正律**として理論体系化した方がいらっしゃいます(**「純正律音楽工房」**の高梨正義さんです。http://www.ne.jp/asahi/mariko/takanashi/masa/index.html)。

表 1 に平均律と純正律の C の周波数で規格化した音階の周波数倍率表を示す。純正律ではある音を基準としたとき、他の音の周波数は基準音の周波数の有理数（分数で表される数）倍となっている。純正律は和音がとても美しく響くのが特徴である。しかしその美しい響きも限られた和音だけであり、転調してしまうともう完全にくずれてしまう。使いやすさからいったら平均律にはかなわないのだが、音楽やコーラスが専門の人の中には（？・・・実はエンジニアかもしれない）その和音の美しさに魅了されて虜になっている人が多い。非常に**マニアック**な**オタク**（**マニアオタク**）が集まる分野である。

2. 純正律の和音の美しさ

純正律ではある音を基準としたとき、他の音の周波数は基準音の周波数の有理数（分数で表される数）倍となっている。式で書くと、f_0を基準音の周波数としたとき、m,nを整数として

$$f_1 = f_0 \frac{n}{m} \tag{1}$$

と書くことができる。式変形すると $mf_1 = nf_0$，$f_0 : f_1 = m : n$ となり、２つの周波数は整数比で表されることになる(音波の速度をvとすると、波長は $\lambda_0 = v / f_0$，$\lambda_1 = v / f_1$ と表される。$\lambda_0 : \lambda_1 = n : m$)。平均律では$2^{1/12}$(2 の 12 乗根)を次々と掛けることになるので$(2^{1/12})^{12n}$以外は無理数倍となっており、一般には２つの異なる音の周波数は整数比で表すことができない。

さて、ではなぜ２つの周波数が整数比になっているとよいのだろうか？「音の周波数解析（音色について）」で持続音は周期波形になっており、それゆえ基音と倍音の和で任意の周期波形を表すことができる、逆に言えば、任意の周期波形を基音と倍音に分解することができることを説明した。今、和音（高さの違う２つ以上の音を同時に鳴らすこと）を鳴らすことを考えてみよう。簡単のために高さの違う２つの音 1、音 2 を同時に鳴らすことを考える。すると、もちろん音 1、音 2 の基音は異なっているのだが、その倍音の周波数はどこかで一致する可能性がある。純正律では実際にそのようになり、図 1 にその様子を示す。横軸は最低音の基音の周波数で規格化した周波数である。これは C, E, G の長３和音（基本位置）を示したものであり、赤い線が C、青い線が E、緑の線が G を示している。縦軸には特に意味がないが、ずらして倍音が重なる位置が分かりやすいように描いた。C の 5 倍音と E の 4 倍音が完全に一致しているのがわかる。また、C の 3 倍音と E の 2 倍音が完全に一致している。

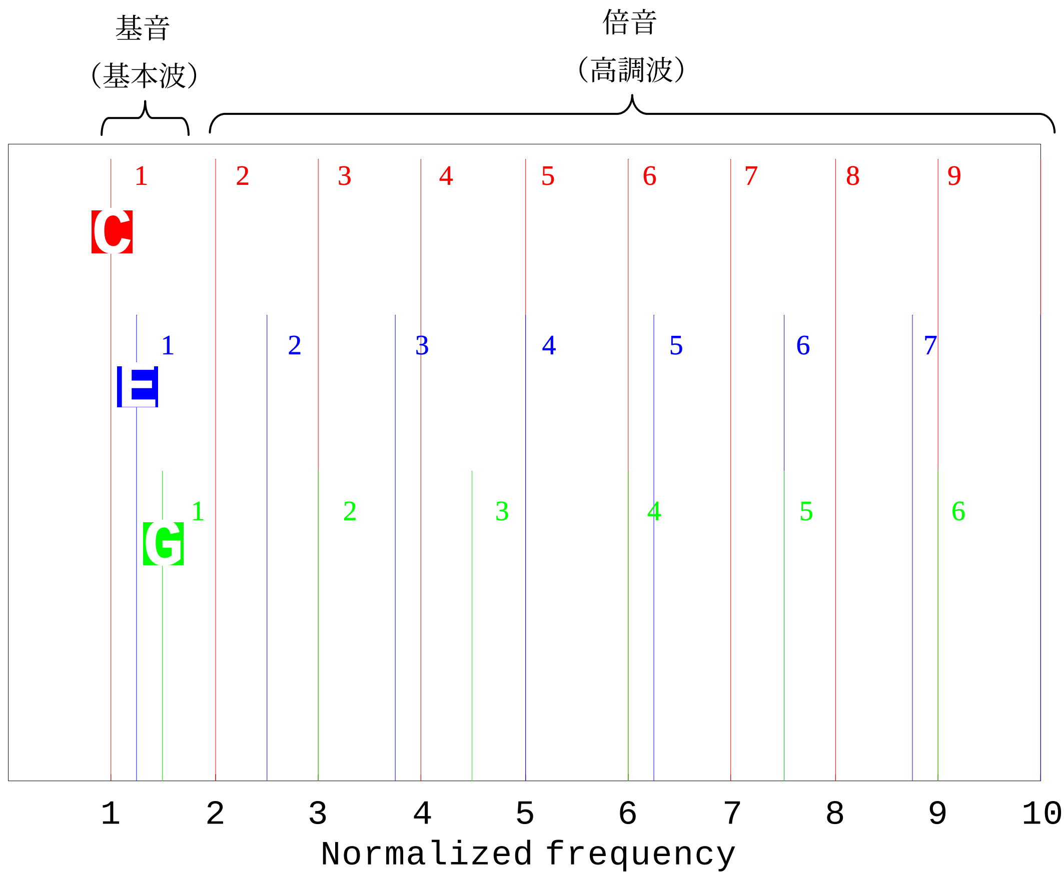


図 1 純正律の長３和音の基音と倍音の周波数

どの倍音が一致するのかもう少し数学の問題として考えて定量的に「音 1 の p 倍音と音 2 の q 倍音が一致する」と自信を持って言えるように計算してみよう。

[定理 1] ２つの高さの音の一致する倍音の計算

純正律で考え、音 1、音 2 の周波数をそれぞれ f_1, f_2 とし、m,n を整数として

$f_2 = f_1 \dfrac{n}{m}$ (ただし、$\dfrac{n}{m}$ は既約とする)

とする。音 1 の p 倍音、音 2 の q 倍音の周波数はそれぞれ pf_1, qf_2 で表される。これらが一致する条件を求めてみよう。

$pf_1 = qf_2$

$pf_1 = qf_1 \dfrac{n}{m}$

$mp = nq$

n/m は既約だから n,m は互いに素な整数である。よって、

$$\begin{cases} p = nl \\ q = ml \end{cases} \quad (l\text{は整数。}\because p, q\text{は整数だから})$$

最初に一致する倍音は$l = 1$のときであり、

$$\begin{cases} p = n \\ q = m \end{cases}$$

となる。■

このようにして純正律では倍音が完全に一致するところがある。では、平均律ではどうだろうか？平均律の周波数比は純正律の周波数比とほぼ同じになっているが表 1 に示すようにほんのわずかにずれている。従って、図 2 に示すように図 1 では完全に一致していたところが少しずれしまう。こんなの少しだからたいした問題ではないかと思いきや、この少しのずれがとんでもない差を生み出してしまうのである。その理由は、**「うなり(トレモロ, tremolo)」**の現象を思い出して欲しい（「うなり(トレモロ, tremolo)」のドキュメント参照）。フーリエ級数の理論を用いて音色を基音と倍音に分解したのだが、当然、基音も倍音もすべて正弦波である。例えば、図 2 において C の 5 倍音と E の 4 倍音が少しずれてしまっている。C(オクターブ 4)の周波数が 261.626Hz だとする。すると、平均律と純正律の E の周波数は表 2 のようになる。平均律、純正律共に C の 5 倍音の周波数は 1308.13Hz(=5×261.626)である。E の平均律、純正律の 4 倍音はそれぞれ 1318.51Hz、1308.13Hz であり、純正律は C の 5 倍音と E の 4 倍音の周波数がピッタリ一致しているが、平均律では 10Hz ほどずれている。この 10Hz のずれがそのままうなりとなって現れてしまうことは「うなり(トレモロ, tremolo)」のホームページで体験してもらった。このうなりが和音の濁りなのである。単音だとうなりの現象はこれと言って汚い音に感じず気にならなかった。逆に音の厚みを出すのに利用していたぐらいであるが、和音においてうなりはうなる倍音とうならない倍音があるから音がくずれて濁りとして聞こえるのではないだろうか。うなるのは基音ではなく倍音であるが、確かにうなっているのが体験できる（「平均律と純正律の和音の比較」のホームページを参照）。純正律ではうなりが発生しない。ノービートとも表現される。ただし、純正律の和音が美しいのも決まった和音だけであり、いろいろな和音に対応することはできない。しかし、最近はコンピュータの発達により、MIDI 楽器がある。コンピュータは瞬時に調律を行うことができるため、MIDI のスケールチューニングメッセージを頻繁に送って純正律で美しい和音を保ったまま曲を演奏することは可能であり、実際にそのようなこともされている。

表 2 平均律と純正律のオクターブ 4 の C と E の周波数

	C	E
平均律	261.626Hz	329.628 Hz
純正律	261.626Hz	327.032 Hz

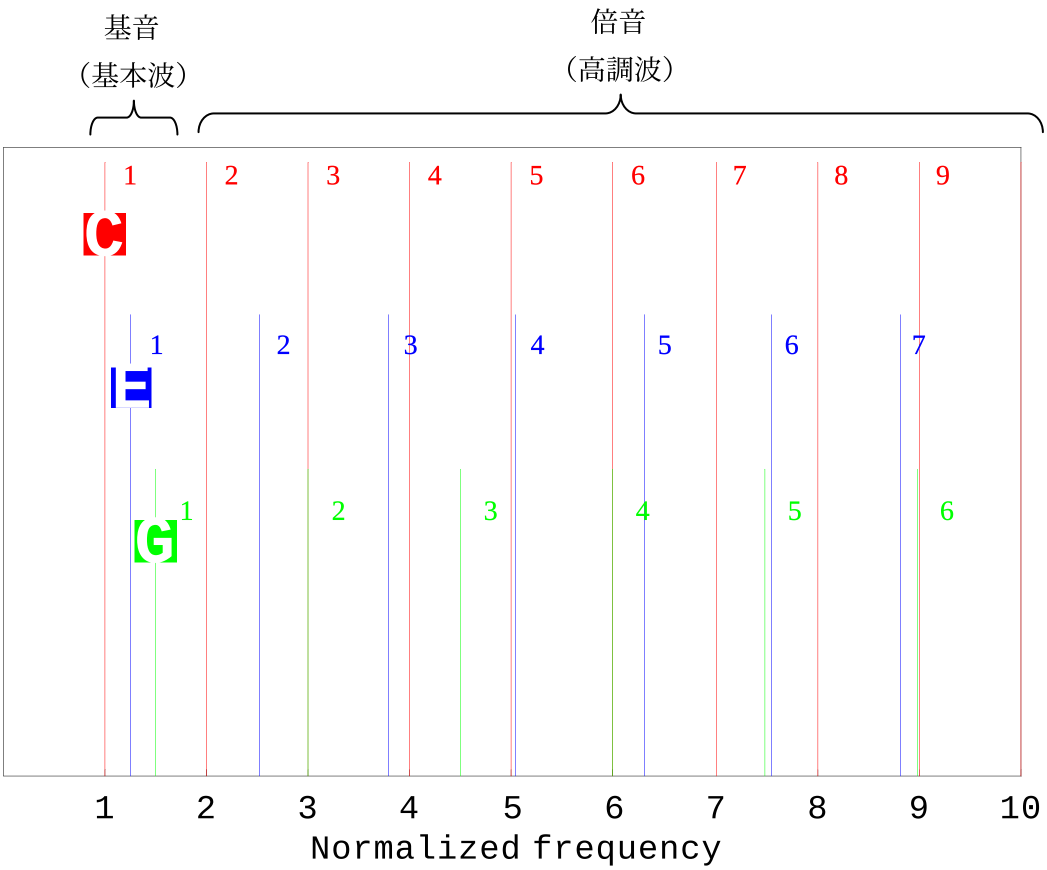


図 2 平均律の長３和音の基音と倍音の周波数

3. 協和音と不協和音

（この章はまだ不完全なので、不完全で間違っているかもしれないとして読んでください）

さて、２章を読んで純正律の和音の美しさの理由がわかったと思うが、まだ気になることがある。それは図 1 を見ると純正律だから倍音が完璧に一致するところはしているが、他の倍音はうまく他の倍音の周波数の間に互いに分散している。もし、これらの分散している周波数同士が図 2 の平均律の場合のように近接してくることがあれば、それら近接した周波数の倍音同士がうなりを生成してしまう。一般にこのようなことは起こりうるのか、または起こらないのか考えてみる。

[定理 2] 倍音の最小周波数間隔の計算

純正律で考え、音 1、音 2 の周波数をそれぞれ f_1, f_2 とし、m, n を整数として

$f_2 = f_1 \dfrac{n}{m}$ (ただし、$\dfrac{n}{m}$ は既約とする)

とする。音 1 の p 倍音($p \in \mathbf{N}$)、音 2 の q 倍音($q \in \mathbf{N}$)の周波数はそれぞれ pf_1, qf_2 で表される。これらの間隔の最小値(0 以外)を求める。まず、周波数の差を求める関数を次のように定義する。

$$d(p,q) \equiv |pf_1 - qf_2| = \left|pf_1 - qf_1\frac{n}{m}\right| = \left|p - q\frac{n}{m}\right| f_1 = |pm - qn|\frac{f_1}{m}$$

ところで、

$$\begin{aligned} d(p+nl, q+ml) &= |(p+nl)m - (q+ml)n|\frac{f_1}{m} \\ &= |pm - qn + (mn - mn)l|\frac{f_1}{m} \\ &= |pm - qn|\frac{f_1}{m} \\ &= d(p,q) \end{aligned}$$

より、 $d(p,q)$ は $(p,q) = (n,m)$ の周期関数である。よって、

$1 \le p \le n$ and $1 \le q \le m$

の範囲で考えればよい。

これは整数論で解決できるかもしれないが詳しくないのでわからない。しかし、周期関数ということがわかったので上の範囲で全検索すれば d の最小値は計算できる(付録 A.1 参照)。

d の 0 以外の最小値がすごく小さい場合は倍音同士が近接してしまい、うなりを引き起こすことを意味する（小さい度合いにもよるが)。■

ところで、表 3 に示すように音楽の和音（この場合２音の和音＝音程）にはよくとけ合う協和音と、まあまあとけ合う不完全協和音、そしてとけ合わない不協和音に分類される。もちろんこれは現在の楽典の一つの基準であり、人間の主観による決め方で将来変わって行くと楽典に書かれている。簡単な整数比になっているものほどよくとけ合うそうで、確かに完全協和音は簡単な整数比と言ってもいいが、いまいち定義が曖昧で気持ち悪い。もうすこし科学的に、定量的になぜそのような違いが生じるのか考えてみる。

表 3 協音程と不協音程

- 音程
  - 協和音
    - 完全協和音
      - 完全1度　1 : 1　*C*
      - 完全8度　1 : 2　*C*
      - 完全4度　3 : 4　*F*
      - 完全5度　2 : 3　*G*
    - 不完全協和音
      - 長3度　4 : 5　*E*
      - 短3度　5 : 6　*D#*
      - 長6度　3 : 5　*A*
      - 短6度　5 : 8　*G#*
  - 不協和音
    - 長2度　*D*
    - 短2度　*C#*
    - 長7度　*B*
    - 短7度　*A#*
    - 増4度・減5度その他の半音階的音程

周波数比（純正律）

さて、和音がよくとけ合うのは周波数が簡単な整数比の関係になるときだというが、その表現は曖昧なのでもう少し基準を作ってグラフを描いてみよう。C を根音として周波数比を

{"c", "c#", "d", "d#", "e", "f", "f#", "g", "g#", "a", "a#", "b"}

$$= \left\{1, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{13}{11}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{7}{5}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, \frac{16}{9}, \frac{15}{8}\right\}$$

で定義した純正律を用いて周波数比を $m : n$ として、図 3 に $m+n$ のグラフを描く。$m+n$ は m, n 共に小さな値のとき小さな値となり、これをもって簡単な整数比と定義する。完全協和音(C, F, G)については確かに小さな値となっており、この基準で簡単な整数比だと言える。しかし、次の不完全協和音を囲むために基準線を引こうとしたとき、短 3 度(D#)も含めようとすると不協和音に分類される D, F#, B も入ってしまう。それでも表 3 は人間の主観によるものだから、大体の傾向はつかめているのではないだろうか。

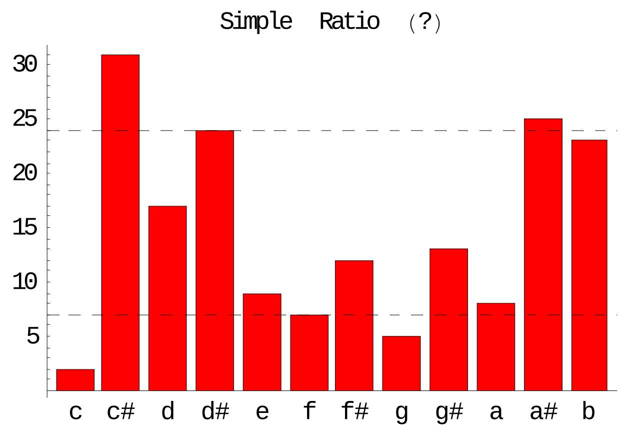


図 3 純正律 1 の $m+n$ のグラフ

それにしても、「周波数が簡単な整数比になる和音ほどよくとけ合う」というのは物理的な意味がつかみにくい。そこで、和音がとけ合わないことは倍音でうなりを生じることだとしたら先ほど定義した関数 $d(p,q)$ が大きくなるような和音が協和音なのではないだろうか。各和音(C との和音)の $d(p,q)$ のグラフを図 4 に示す。この値が大きいのが協和音で小さいのが不協和音と言いたい(C の 0 は特殊)ところであるが完全に一致はしない。それにしても、図 4 は図 3 と大体相関があるところが興味深い。

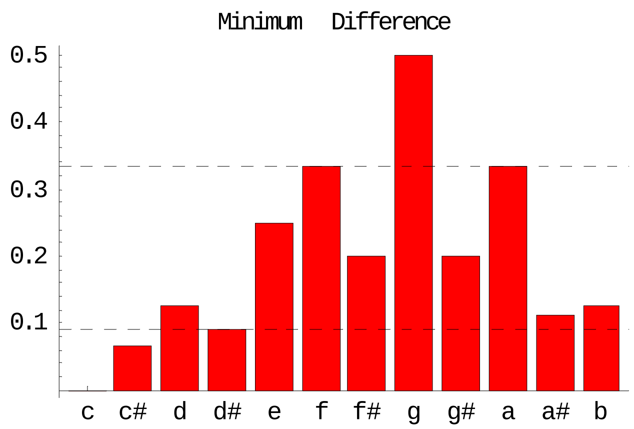


図 4 純正律 1 の $d(p,q)$ のグラフ(C が根音)

今は和音が響くということは $d(p,q)$ の 0 以外の最小値が大きいことではないかと考えてみた。今度は $d(p,q)$ の周期 m および n の最大周期 $\max(m,n)$ が短い、つまり倍音が最初に重なるまでの周期が短いということ基準にしてはどうかと思い、グラフを図 5 に描いてみた。なぜならば、倍音が次に重なるまでの最大周期が短いならば、その途中で倍音同士が接近する可能性が低いからである。このグラフでは値が小さい程和音がとけ合うと読み取る。こちらも G, F については表 3 に近く、なかなかいいと思われるが、いまいち完全に表 3

とは対応しない。図 3、図 4 とは大体相関がある。

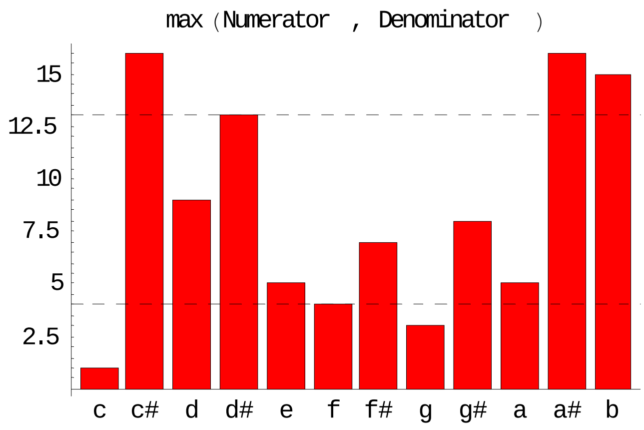


図 5 純正律 1 の max(m,n) のグラフ(C が根音)

今度は前の純正律の D#, F#の周波数比をよく楽典に書かれている周波数比に直して次の値

{**"c", "c#", "d", "d#", "e", "f", "f#", "g", "g#", "a", "a#", "b"**} =

$$\left\{\mathbf{1}, \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{15}}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{8}}, \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{45}}{\mathbf{32}}, \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}, \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{9}}, \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}}\right\}$$

を用いて図 3、図 4、図 5 に対応する図 6、図 7、図 8 を得た。図 6 は表 3 と完全に一致している。図 6、図 7、図 8 は相関が高く、図 7 では A が F と同じになってしまっていることぐらいである。図 8 は図 6 の関係と一致している。よって、和音の美しさは倍音の距離が離れていること、および倍音が完全に一致する周期が短いことが物理的性質である可能性が高いと思われる。

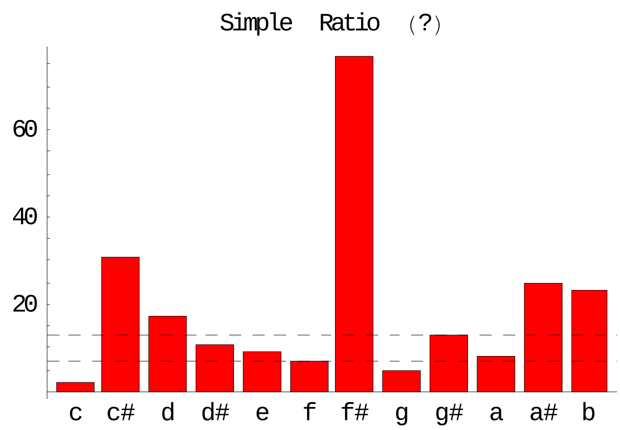


図 6 純正律 2 の $m+n$ のグラフ

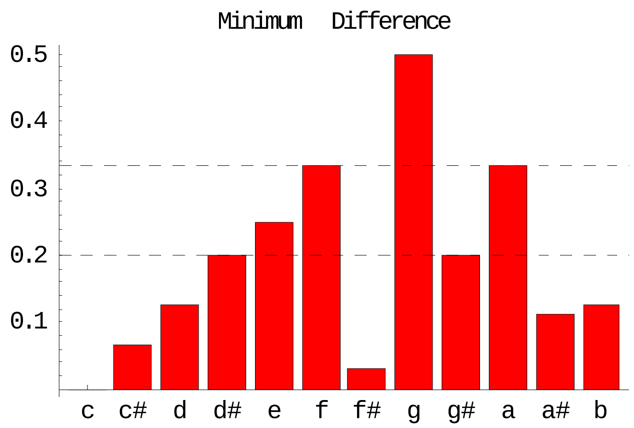


図 7 純正律 2 の $d(p,q)$ のグラフ(C が根音)

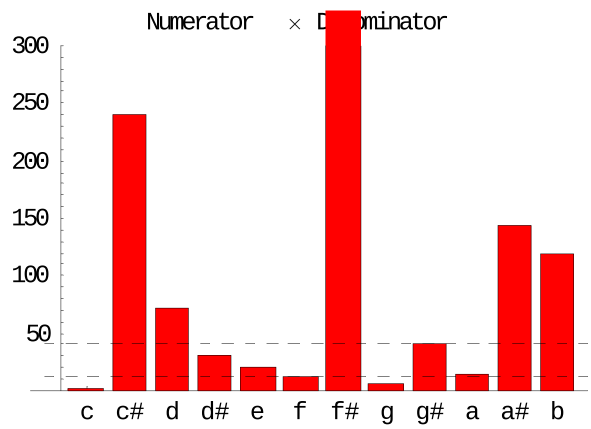


図 8 純正律 2 の $\max(m,n)$ のグラフ(C が根音)

4. まとめ

純正律の和音の美しい響きについて考察した。平均律の和音では倍音によるうなりが発生するが、純正律では発生せず、それが美しい和音の理由であることがわかった。純正律の美しい和音の議論から協和音・不協和音についての考察へと発展したが、検討は不十分である。今後の課題にしたい。

A. 付録

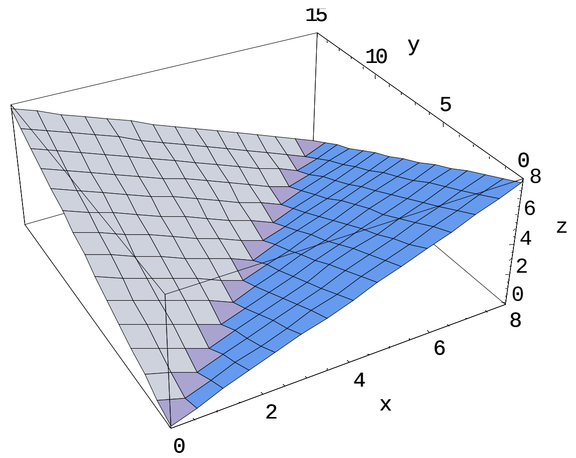
A.1 和音の考察

和音の考察

2003/2/25 平野拓一（東京工業大学）
Takuichi Hirano (Tokyo Institute of Technology)

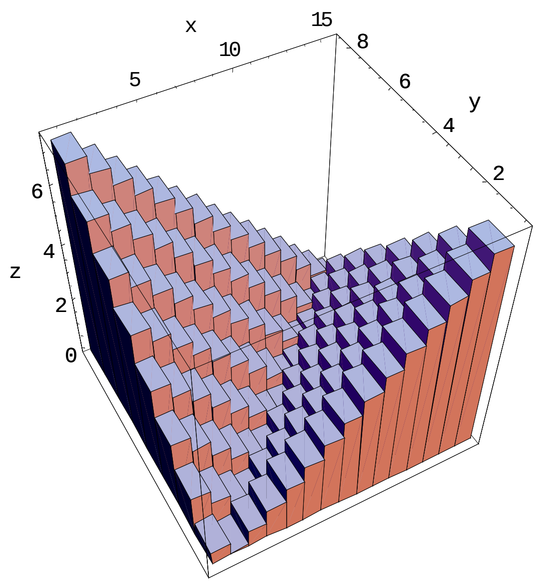
範囲内で最小値を求める

In[1]:=
```
m = 15;
n = 8;
f[p_, q_] := Abs[p*m - q*n] * 1/m;
Plot3D[f[p, q], {p, 0, n}, {q, 0, m},
 AxesLabel→ {"x", "y", "z"},
 ViewPoint -> {-1.373, -2.491, 1.833}]
```



Out[4]= - SurfaceGraphics -

In[5]:=
```
<< Graphics`Graphics3D`;
BarChart3D[Table[f[p, q], {q, 1, m}, {p, 1, n}],
 AxesLabel→ {"x", "y", "z"},
 ViewPoint -> {-1.099, -1.995, 2.502}]
```



Out[6]= - Graphics3D -

最小周波数差など

```
In[7]:= ABCToNumOfHalfTone[ABC_] := Which[
    ABC == "C" || ABC == "c", 0,
    ABC == "C#" || ABC == "c#", 1,
    ABC == "D" || ABC == "d", 2,
    ABC == "D#" || ABC == "d#", 3,
    ABC == "E" || ABC == "e", 4,
    ABC == "F" || ABC == "f", 5,
    ABC == "F#" || ABC == "f#", 6,
    ABC == "G" || ABC == "g", 7,
    ABC == "G#" || ABC == "g#", 8,
    ABC == "A" || ABC == "a", 9,
    ABC == "A#" || ABC == "a#", 10,
    ABC == "B" || ABC == "b", 11];

  (*JustIntonationFractionList={1, 16/15, 9/8, 13/11, 5/4, 4/3, 7/5, 3/2, 8/5, 5/3, 16/9, 15/8};*)
  JustIntonationFractionList = {1, 16/15, 9/8, 6/5, 5/4, 4/3, 45/32, 3/2, 8/5, 5/3, 16/9, 15/8};

  SimpleRatio[ABC_] := Module[{},
    n = Numerator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    m = Denominator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    n + m
   ];
  MinOverToneDiff[ABC_] := Module[{},
    n = Numerator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    m = Denominator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    lis = Flatten[Table[f[p, q], {q, 1, m}, {p, 1, n}]];
    If[Length[lis] ≠ 1,
     Sort[lis][[2]] // N,
     0]
   ];
  MaxDenoNume[ABC_] := Module[{},
    n = Numerator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    m = Denominator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    Max[n, m]
   ];
  LCMDenoNume[ABC_] := Module[{},
    n = Numerator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    m = Denominator[JustIntonationFractionList[[ABCToNumOfHalfTone[ABC] + 1]]];
    n * m
   ];
```

グラフ表示

```
In[13]:= ABCList = {"c", "c#", "d", "d#", "e", "f", "f#", "g", "g#", "a", "a#", "b"};

PadSpaceToString[str_] := If[StringLength[str] == 1,
    str <> " ",
    str];
Print["Note    MinOverToneDist    period of (p,q)    Max"];
Do[
  Print[PadSpaceToString[ABCList[[i]]], ":    ",
    PaddedForm[MinOverToneDiff[ABCList[[i]]], {12, 8}], "        ", "(",
    PaddedForm[n, 2], ",", PaddedForm[m, 2], ")", "        ", Max[m, n]];
  , {i, 1, Length[ABCList]}
 ];

<< Graphics`Graphics`;
criteria[1] = 7;
criteria[2] = 13;
BarChart[Table[SimpleRatio[ABCList[[i]]], {i, 1, Length[ABCList]}],
  BarLabels → ABCList,
  PlotLabel → "Simple Ratio (?)",
  Epilog → {{Dashing[{0.02, 0.02}], Line[{{0, criteria[1]}, {13, criteria[1]}}]},
    {Dashing[{0.02, 0.02}], Line[{{0, criteria[2]}, {13, criteria[2]}}]}}];

criteria[1] = 0.2;
criteria[2] = 0.3333;
BarChart[Table[MinOverToneDiff[ABCList[[i]]], {i, 1, Length[ABCList]}],
  BarLabels → ABCList,
  PlotLabel → "Minimum Difference",
  Epilog → {{Dashing[{0.02, 0.02}], Line[{{0, criteria[1]}, {13, criteria[1]}}]},
    {Dashing[{0.02, 0.02}], Line[{{0, criteria[2]}, {13, criteria[2]}}]}}];

criteria[1] = 4;
criteria[2] = 8;
BarChart[Table[MaxDenoNume[ABCList[[i]]], {i, 1, Length[ABCList]}],
  BarLabels → ABCList,
  PlotLabel → "max(Numerator, Denominator)",
  Epilog → {{Dashing[{0.02, 0.02}], Line[{{0, criteria[1]}, {13, criteria[1]}}]},
    {Dashing[{0.02, 0.02}], Line[{{0, criteria[2]}, {13, criteria[2]}}]}}];
```

Note	MinOverToneDist	period of (p,q)	Max
c :	0.00000000	(1, 1)	1
c#:	0.06666667	(16, 15)	16
d :	0.12500000	(9, 8)	9
d#:	0.20000000	(6, 5)	6
e :	0.25000000	(5, 4)	5
f :	0.33333333	(4, 3)	4
f#:	0.03125000	(45, 32)	45
g :	0.50000000	(3, 2)	3
g#:	0.20000000	(8, 5)	8
a :	0.33333333	(5, 3)	5
a#:	0.11111111	(16, 9)	16
b :	0.12500000	(15, 8)	15