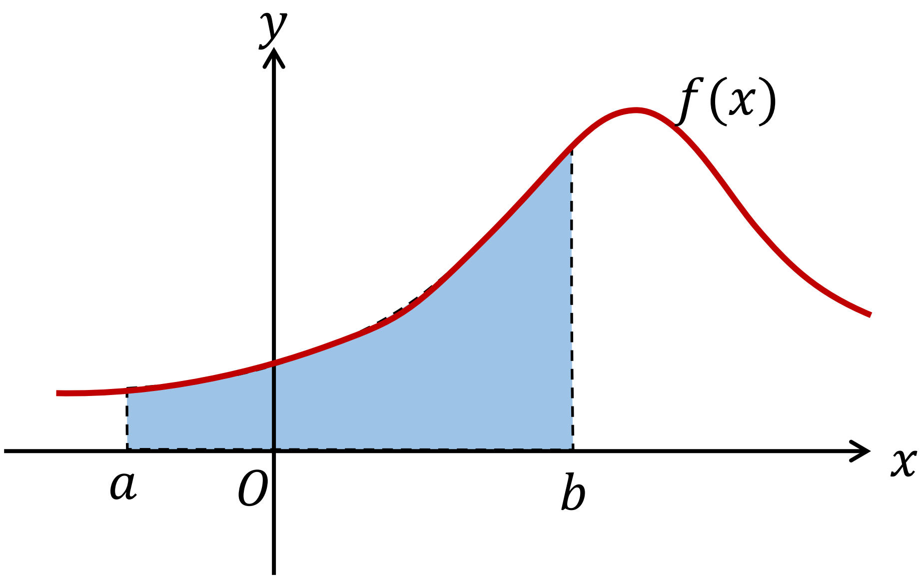
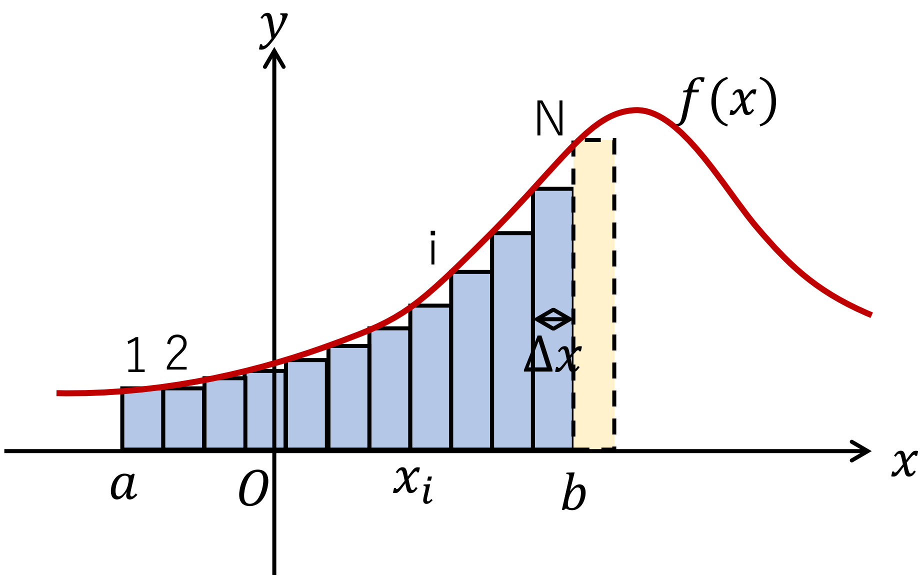
2025年5月23日

区分求積による数値積分

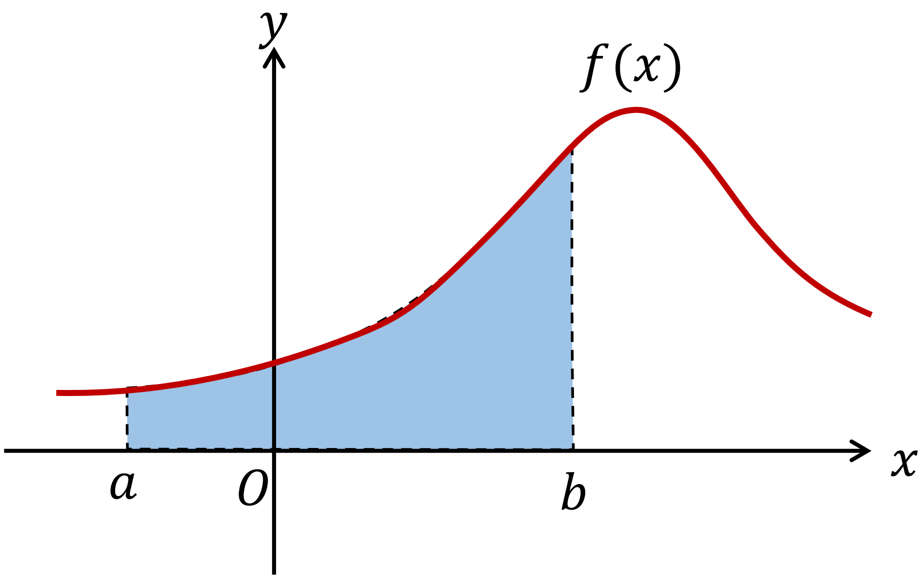


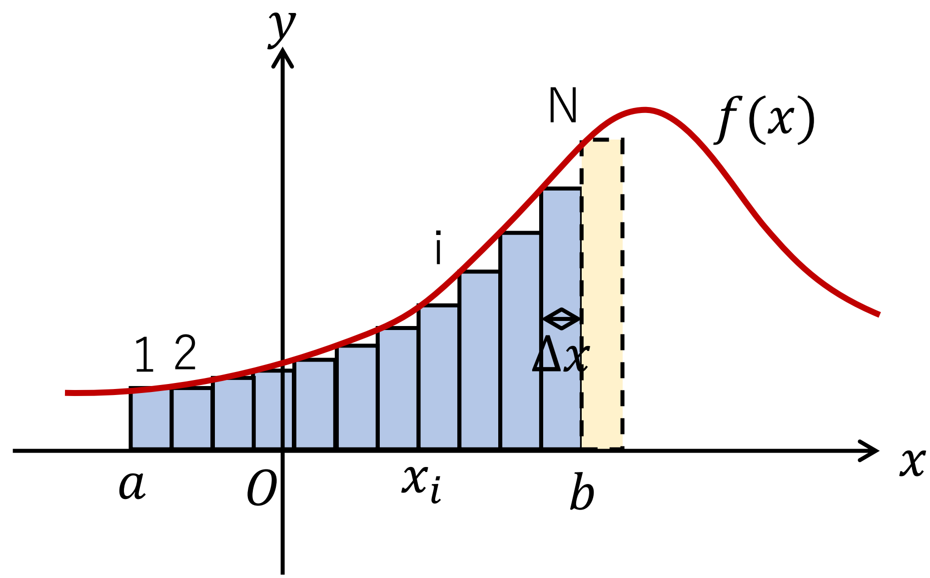


$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

平野拓一

積分と区分求積





滑らかな曲線で囲まれた面積

$$\int_{x=a}^{b} f(x)dx$$

細い短冊（長方形）の面積の和

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

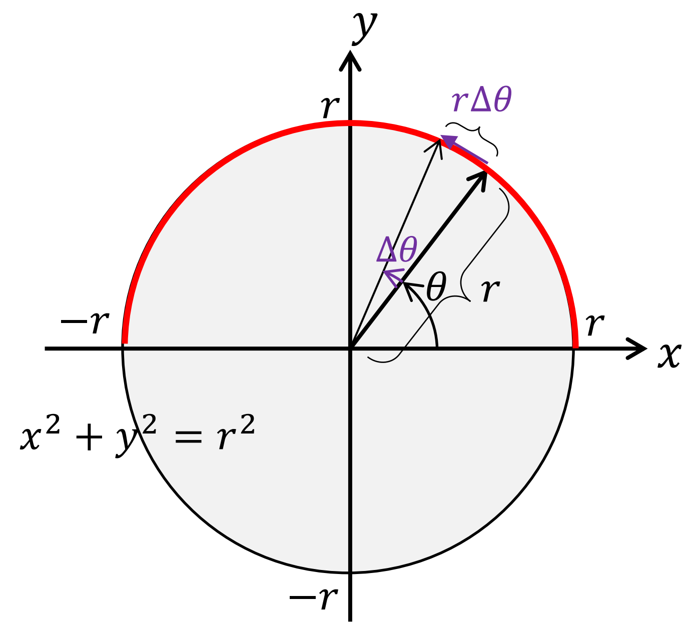
$$\Delta x = \frac{b-a}{N}, x_i = a + (i-1)\Delta x$$

線の長さ

円弧の長さ(極座標で積分)

$$l = \int_{\theta=0}^{\pi} r d\theta = r \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta$$

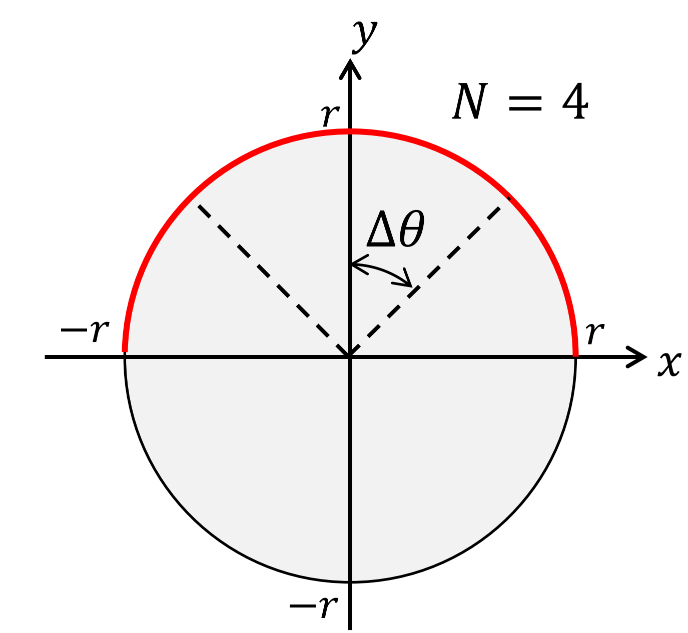
$$= r[\theta]_0^{\pi} = r(\pi - 0) = \pi r$$



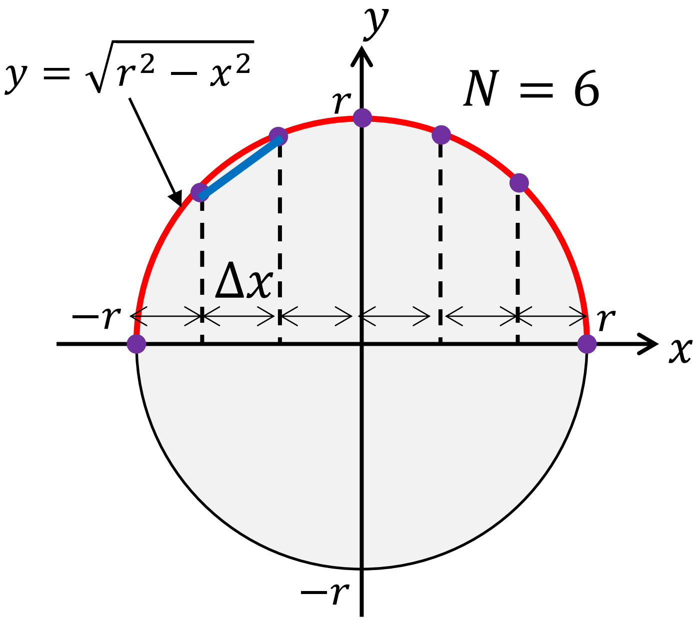
$$l \cong \sum_{i=1}^{N} r\Delta\theta = r \sum_{i=1}^{N} \Delta\theta$$

$$\boxed{\Delta\theta = \frac{\pi}{N}}$$

$$= \pi r$$



円弧の長さ(直角直交座標で積分)



$$l \cong \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

$$\Delta x = \frac{2r}{N}$$
$$x_i = -r + i\Delta x$$
$$y_i = \sqrt{r^2 - {x_i}^2}$$

MATLABプログラム

```
n=100;
r=1;

dx=(2*r)/n;

l=0;
for i=1:n
    x0=-r+(i-1)*dx;
    y0=sqrt(r^2-x0^2);

    x1=-r+i*dx;
    y1=sqrt(r^2-x1^2);

    dl=sqrt(dx^2+(y1-y0)^2);
    l=l+dl;
end
l
```

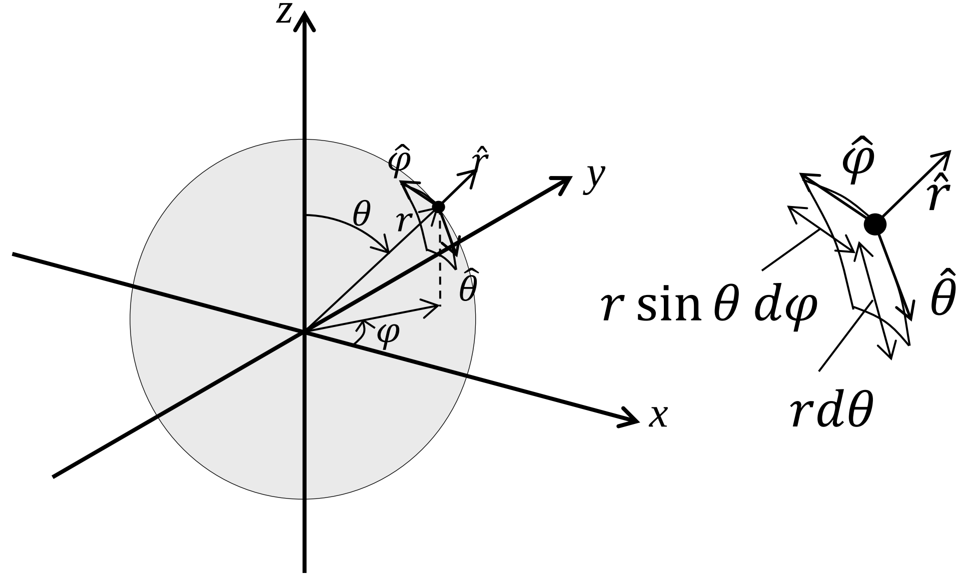
```
l =
    3.1408
```

面積

球の表面積（極座標で積分）

積分（極座標）

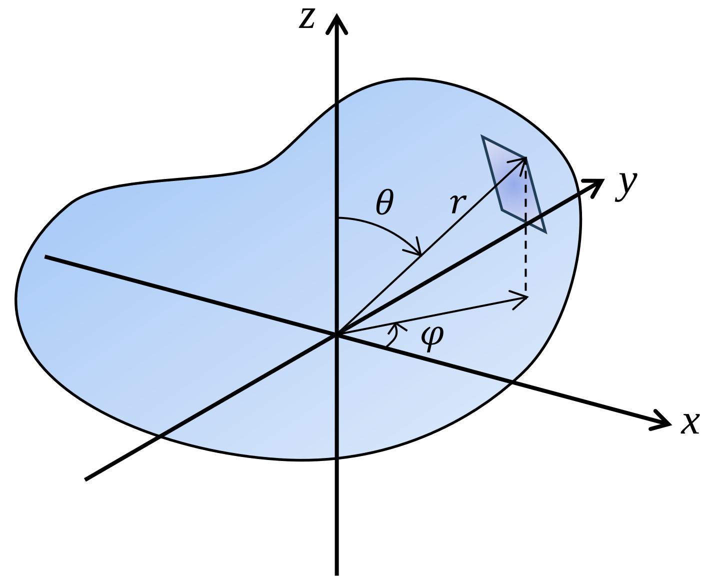
$$S = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta d\varphi$$
$$= r^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$
$$= \cdots = 4\pi r^2$$



区分求積（rがθ,φの関数でも簡単）

$$S \cong \sum_{i=1}^{N_\theta}\sum_{j=1}^{N_\varphi} r(\theta_i, \varphi_j)^2 \sin\theta_i \, \Delta\theta\Delta\varphi$$

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{N_\theta}, \theta_i = (i-1)\Delta\theta$$
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N_\varphi}, \varphi_i = (j-1)\Delta\varphi$$



球の表面積（数値計算例）

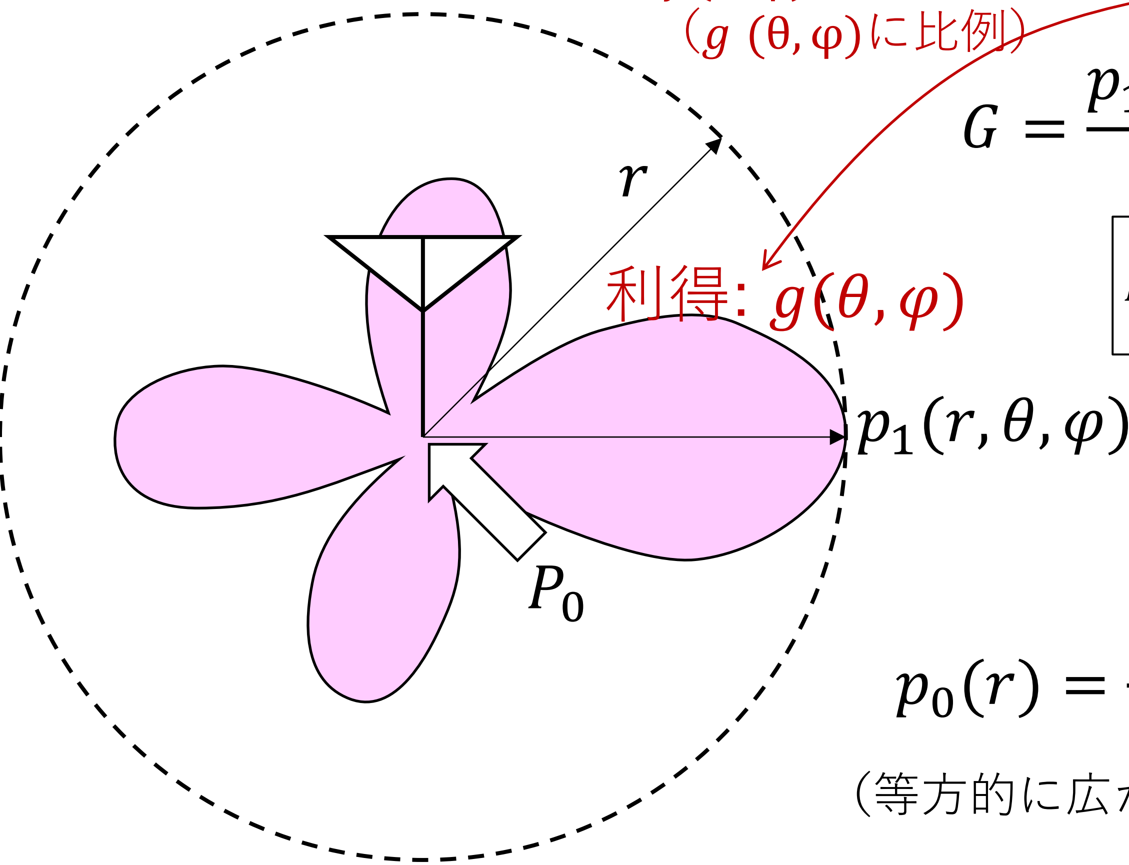
MATLABプログラム

```
r=1; % 球の半径

nt=90; % θ方向分割数
np=180; % φ方向分割数

dt=pi/nt; % Δθ
dp=(2*pi)/np; % Δφ

s=0; % 数値積分の値（ここに足していく）
for i=1:nt
   theta=(i-1)*dt; % θ
   sin_t=sin(theta); % sin(θ)
   for j=1:np
      phi=(j-1)*dp; % φ
      ds=(r^2)*sin_t; % ΔS

      s=s+ds; % ΔSを足す
   end
end
s=s*(dt*dp) % 数値積分（一様分割なのでΔθΔφをかける）
4*pi*(r^2) % 球の表面積の厳密解
```

```
s =12.5651
ans =12.5664
```

応用（アンテナ利得の計算）

$f(\theta,\varphi)$: rに無依存
（$g\ (\theta,\varphi)$に比例）



$$G = \frac{p_1(r,\theta,\varphi)}{p_0(r)} = \frac{4\pi \overbrace{\boxed{r^2 p_1(r,\theta,\varphi)}}^{f(\theta,\varphi)}}{P_0}$$

$$P_0 = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \underbrace{\boxed{p_1(r,\theta,\varphi) r^2}}_{f(\theta,\varphi)} \sin\theta \, d\theta d\varphi$$

アレーファクタや指向性などに対応

$$p_0(r) = \frac{P_0}{4\pi r^2}$$

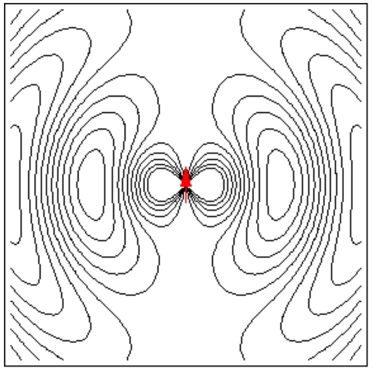
（等方的に広がった場合の電力密度）

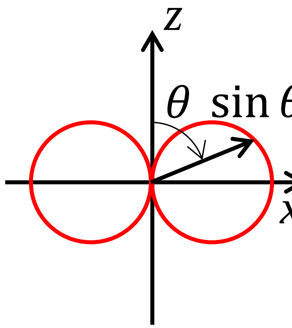
微小ダイポールの利得

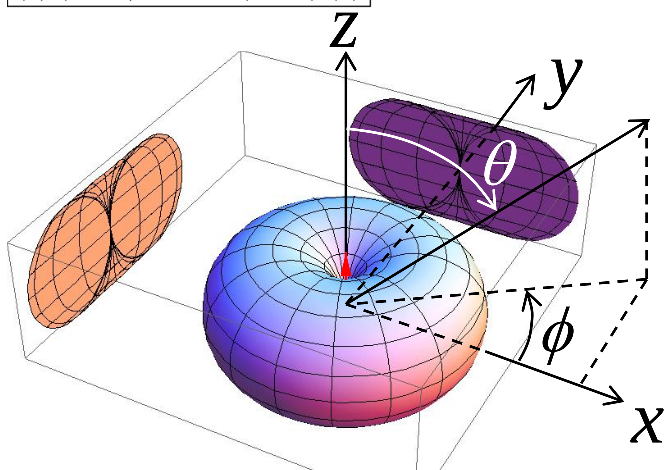
MATLABプログラム

```
nt=90; % θ方向分割数
np=180; % ϕ方向分割数

dt=pi/nt; % Δθ
dp=(2*pi)/np; % Δϕ

s=0; % 数値積分の値（ここに足していく）
for i=1:nt
   theta=(i-1)*dt; % θ
   sin_t=sin(theta); % sin(θ)
   for j=1:np
      phi=(j-1)*dp; % ϕ

      f=(sin(theta))^2; % 微小ダイポールの指向性
      ds=f*sin_t; % ΔS

      s=s+ds; % ΔSを足す
   end
end
s=s*(dt*dp) % 数値積分（一様分割なのでΔθΔϕをかける）
gain=(4*pi*1)/s
10*log10(gain)
```

微小ダイポールの指向性
$\sin\theta$から利得1.5
(1.76dBi)を計算した例。








```
s = 8.3776
gain = 1.5000
ans = 1.7609
```